

Nikomakos teorem

– om kuber som blir kvadrater

Det är kul att leka med siffror för att se hur de hänger ihop. Ja, det är inte bara kul, det är också en fruktbar väg framåt för att lära sig matematik.

Om man själv får upptäcka hur något hänger ihop och får en aha-upplevelse, då blir det enklare att sedan intressera sig för teorin runt omkring det. Ta till exempel alla naturliga tal upp till $n=3$. Beräkna först summan av dessa och ta därefter kvadraten på denna summa. Vi får då: $(1+2+3)^2 = 6^2 = 36$. Beräkna också summan av de tre första kuberna: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$. Testar man andra värden på n ser man att likheten håller även i dessa fall (se tabell 1). I år har till exempel $n=9$ fått extra uppmärksamhet i sociala medier, eftersom dessa uttryck blir – just det – 2025!

Tabell 1. Nikomakos teorem: Summor av kuber är lika med kvadrater på summor.

Rad	Summan av kuber	Kvadraten på summor	Resultat
1	1^3	1^2	1
2	$1^3 + 2^3$	$(1+2)^2$	9
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	$(1+2+3)^2$	36
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	$(1+2+3+4)^2$	100
5	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$	$(1+2+3+4+5)^2$	225

Rent generellt gäller följande samband:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 \dots + n)^2 \quad (1)$$

där n är ett heltal.

Relationen kallas för Nikomakos teorem, efter den grekiske matematikern och nypytagoréen Nikomakos av Gerasa (runt år 60–120 e kr). Matematikern Roel Stroeker har skrivit att "var och en som studerar talteori har säkert förundrats över detta mirakulösa faktum". Det är lätt att hålla med. Relationen är både förvånande och estetiskt tilltalande.

Nikomakos verkade i den romerska provinsen Syrien. Han var också en av de viktigaste tidiga aritmetikerna och skrev en lärobok, kallad *Introduktion till aritmetiken*, som översattes till antikens viktiga språk, och kom att bli ett standardverk under sekler. Nikomakos ställde bland annat upp ett antal hypoteser kring de perfekta talen, och huruvida det finns udda sådana, något som ibland kallats det äldsta matematiska problemet i världen. Det finns också en asteroid uppkallad efter honom: 8128 Nikomakos.

Varför blir det lika?

Åter till frågan: vad har summor av kuber och kvadrater på summor att göra med varandra? Varför blir de lika? Teoremet går att bevisa med hjälp av induktion, men här ska vi försöka förstå det mer från grunden.

Högerledet: kvadrater på summor

Låt oss börja med högerledet i ekvation (1). Vi noterar att det är relativt lätt att beräkna. Den observante läsaren minns möjligen att summan av alla heltal $(1 + 2 + \dots + n)$ ges av $n(n+1)/2$. Det är en observation Gauss gjorde som väldigt ung, och som brukar stå omnämnd i matematikböcker. Gauss lär ha varit bara fem år när han fick i uppgift av sin lärare att beräkna summan $1 + 2 + 3 + \dots + 100$, och insåg snabbt att här fanns en symmetri. Man kan nämligen addera $1 + 100$, sedan $2 + 99$ et cetera. Alla dessa summor blir 101, och man har $100/2$ sådana par, svaret blir därmed $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

I vårt fall ska man ta kvadraten på detta uttryck och får då att högerledet i ekvation (1) kan skrivas som

$$HL = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (2)$$

Vänsterledet: summan av kuber

Vänsterledet i ekvation (1) kan skrivas på samma sätt, men för det krävs lite mer hjärngympa. Låt oss börja med att utnyttja att kuber kan skrivas som summor av (vissa följder av) udda tal (se tabell 2). Summan $7 + 9 + 11$, kan exempelvis skrivas som $9 + 9 + 9$ (genom att vi subtraherar två från elva och adderar dem till sju). Då får vi $3 \cdot 9$, alltså 3^3 .

Förfarandet gäller generellt. Summan av n på varandra följande udda tal centrerade runt n^2 är lika med n^3 (se tabell 2). Det finns onekligen något elegant i detta.

Tabell 2. En kub kan skrivas som summan av en serie udda tal.

Rad	En serie av n udda tal	Summa	Skrivet som kub
1	1	1	1
2	3 + 5	8	2^3
3	7 + 9 + 11	27	3^3
4	13 + 15 + 17 + 19	64	4^3
5	21 + 23 + 25 + 27 + 29	125	5^3
n	$\sum_{k=1}^n (n(n-1) - 1 + 2k)$	n^3	n^3

Här ser vi att rad n har n på varandra följande udda tal i sig, och summan av dem är lika med kuben av n . Notera också att successiva summor i kolumn tre ger kvadrater på de naturliga talen, alltså $1 + 8 = 9$, $1 + 8 + 27 = 36$ och så vidare. Det kan också noteras att summationen i sista raden sker över heltalen k som löper från 1 till n .

Låt oss nu summera alla raderna. Då får vi att summan av alla udda tal upp till talet $(n(n+1)-1)$ är lika med summan av alla kuber upp till n :

$$1+3+5+\dots+(n(n+1)-1)=1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 \quad (3)$$

På mer kompakt form, med byte av plats på höger och vänster led, kan det skrivas så här:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} (2k-1) \quad (4)$$

där vi summerar över heltalet k (som löper över 1 till n i vänsterled och över 1 till $n(n+1)/2$ i högerled). Detta uttryck, som visar att man kan skriva en summa av kuber som en summa över de udda talen, utgör kärnan i förståelsen bakom Nikomakos teorem. Strängt taget var det denna observation Nikomakos gjorde.

Uttrycken sätts samman

Notera nu att högerled i ekvation fyra är en summa av en serie av udda tal. Dessa kan skrivas som en kvadrat. Vi har till exempel $1+3+5=9=3^2$ och $1+3+5+7=16=4^2$ och så vidare. Rent generellt gäller att summan av de A första udda talen är lika med A^2 , enligt:

$$\sum_{k=1}^A (2k-1) = 2\left(\sum_{k=1}^A k\right) - A = 2 \frac{A(A+1)}{2} - A = A^2 \quad (5)$$

Uttryck (5) kan nu användas för att förenkla ekvation (4) ytterligare ett steg. Notera att när vi sätter in ekvation (5) i ekvation (4) så använder vi att

$$A = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Vi får då: } \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} (2k-1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (6)$$

Därmed har vi visat att summan av de första n kuberna är lika med kvadraten på summan av de första n naturliga talen.

Sammanfattningsvis kan man säga att beviset bygger på a) att kuber kan skrivas som en summa av en serie udda tal, b) att summan av en serie kuber från 1 till n , kan skrivas som en summa av udda tal från 1 och upp till givet heltal, samt c) att en sådan summa kan skrivas som en kvadrat, som d) är lika med kvadraten på summan av de naturliga talen från 1 till n .

Ett kul sätt att lära sig matematik är att testa olika fall. Om man märker att exempelvis Nikomakos teorem stämmer för $n=1, 2$ och 3 väcks rätt naturligt viss nyfikenhet. Stämmer det här för alla n ? Hur kan man bevisa att det gäller generellt? Att låta elever undersöka matematiska relationer för att själva upptäcka samband och ställa frågor kring dessa är ett bra pedagogiskt grepp. Och det behöver så klart inte handla om Nikomakos teorem. Ett enklare men också fascinerande exempel att börja med är det faktum att summan av de n första udda talen är lika med n i kvadrat.

LITTERATUR OCH FILM

Strooker, R. J. (1995). *On the Sum of Consecutive Cubes Being a Perfect Square*. Compos. Math. 97, 295–307.

Film om 2025 som summan av kuber: https://www.youtube.com/shorts/7DznMlzn_nA