

En gåtfull division

Division med noll är något som sällan presenteras i svenska matematikläroböcker, varken i mellan- eller högstadiet, trots att det är en viktig byggsten i elevernas matematiska förståelse. Det skapar ett avstånd mellan styrdokumentens intentioner och det material elever och lärare möter i klassrummet.

Hur skulle du beräkna divisionen $5 / 0 = ?$ Är svaret fem? Eller är det noll? Kanske att det är oändligt? Eller svarar du att det inte går att beräkna för att det är odefinierat? Oavsett vad du svarar så är du inte ensam om det. Vi är tre lärarstudenter som i en tidigare litteraturstudie *En gåtfull siffra; en studie om nollans historia och division med noll*, granskat forskning om hur elever, lärarstudenter och lärare förklarade division med noll i nämnaren. De fem vanligaste svaren som identifierades var att kvoten blir *fem, noll, oändlig, inte går att beräkna* eller är *odefinerad*. Majoriteten av deltagarna i de granskade studierna gav inte det matematiskt korrekta svaret, det vill säga att division med noll i nämnaren är odefinierad. Av de som angav det korrekta svaret var det dessutom svårt för många att motivera *varför* det är så. Det väckte vår nyfikenhet kring vad som kan ligga bakom missförstånd kring division med noll i nämnaren. Varför råder det en sådan osäkerhet kring detta i skolvärlden? Vi sökte svar på frågan genom att undersöka närvaron av division med noll i svenska matematikläroböcker.

Vad står egentligen om noll i läroböcker?

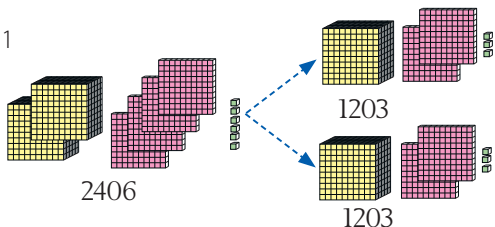
Att räkna med noll är i många avseenden självklart. Vi adderar, subtraherar och multiplicerar med noll utan problem. Division med noll är dock ett undantag. Det är ett gåtfullt matematiskt fenomen vars lösning förvirrar och kan för många vara svårt att acceptera. I det centrala innehållet för både mellan- och högstadiet står det bland annat att undervisningen ska behandla *de fyra räknesätten med naturliga tal*. Vi ville därför undersöka hur detta presenteras i läroböcker. Undersökningen genomfördes på NCM där vi granskade 27 svenska matematikläroböcker för mellan- och högstadiet. Först undersöktes om noll presenteras som ett naturligt tal och därefter huruvida division med noll förekommer eller inte.

Av de 27 läroböckerna var det cirka en tredjedel som presenterade en definition av naturliga tal, varav alla inkluderade nollan som en av dem. Det var alltså två tredjedelar av läroböckerna som inte presenterade en definition av naturliga tal över huvud taget. När det kom till förklaringar av division med noll var det endast två av de 27 böckerna som presenterade exempel med division som innehöll noll i antingen täljare eller nämnare.

Det första fallet inkluderade noll endast i täljaren som en del vid beräkning av kort division, se figur 1.

$$\frac{2406}{2} = 1203$$

- ♦ Börja med att dividera tusentalen. $\frac{2}{2} = 1$
- ♦ Dividera hundratalen. $\frac{4}{2} = 2$
- ♦ Dividera tiotalen. $\frac{0}{2} = 0$
- ♦ Dividera sist entalen. $\frac{6}{2} = 3$



Figur 1. Exempel på division med noll i täljaren.

Det andra fallet förklarade division med noll i nämnaren på tre olika sätt. Först inleddes avsnittet med en faktaruta innehållande påståendet: det *går inte* att dividera med noll eftersom kvoten hade blivit *oändlig*, och att oändligheten inte är ett tal. Påståendet skulle kunna leda till missuppfattningen att kvoten inte kan bli oändlig just på grund av att oändligheten inte är ett tal, vilket kan skapa förväntningen att division med noll i nämnaren istället ska resultera i ett ändligt tal. Därefter ges exemplet $15/0$, där divisionen påstås vara *odefinierad* och att svaret är att det *inte går att beräkna*.

Det är visserligen positivt att läroboken tar upp division med noll i nämnaren, vilket ingen av de andra läroböckerna gör. Dessvärre görs det på ett motsägelsefullt sätt som försvårar förståelsen snarare än att klargöra den för både elever och lärare. Det väcker frågor om vad författarna till läroboken egentligen vill att eleverna ska ta med sig, och framför allt vilket av de olika svaren som är matematiskt korrekt.

Vad blir egentligen division med noll?

Oändligt, *odefinierad* och *inte går att beräkna* är svar som i läroboken förefaller betyda samma sak. Detta kan bidra till förvirring för eleverna men också för läraren som ska förklara saken. Det matematiskt korrekta svaret är att kvoten till division med noll i nämnaren är odefinierad. Att divisionen *inte går att beräkna* och kvoten är *odefinierad* tolkas i läroboken som ekvivalenta påståenden.

Vår litteraturstudie visar att användandet av svaret *inte går att beräkna* ofta grundar sig i regelbaserade förklaringar där den konceptuella förståelsen för abstrakta matematiska fenomen är begränsad. En regelbaserad förklaring är till exempel att man säger att "det bara är så, min lärare har sagt det", utan ytterligare motivering. Man accepterar det som ett svar utan att ifrågasätta. De som istället svarade att divisionen är *odefinierad* kunde i större utsträckning ge en korrekt matematisk förklaring till varför det är så, och visade därmed på större konceptuell förståelse.

Vi ser en fördel i att introducera eleverna till begreppet *odefinierad* för att de ska ta sig ifrån ett vardagligt språk som till exempel att det *inte går att beräkna* till ett mer matematiskt språk.

Ett didaktiskt tomrum att fylla

När division med noll inte behandlas i läroböcker lämnas ett didaktiskt tomrum. Lärare behöver på egen hand upptäcka det läroplanen kräver som läroböckerna inte uppfyller och på ett pedagogiskt sätt förklara det för eleverna. Att identifiera innehåll som läroböckerna inte behandlar kan vara svårt. För att undervisa om division med noll och fylla detta tomrum presenterar vi här två olika metoder: sambandet mellan division och multiplikation och gränsvärde som verktyg.

Sambandet mellan division och multiplikation

Den första metoden handlar om att elever ska utveckla förståelse för hur division och multiplikation hänger ihop. Man kan säga att division är den inversa operationen till multiplikation. Sambandet kan visualiseras genom att använda bokstäver eller symboler, som i figur 2.

$$\frac{a}{b} = c \iff c \cdot b = a$$

$$\frac{\text{yellow circle}}{\text{blue triangle}} = \text{green square} \iff \text{green square} \cdot \text{blue triangle} = \text{yellow circle}$$

Figur 2. Division och multiplikation som motsatta (inversa) räknesätt.

Med dessa exempel kan eleverna visualisera vad som händer om nämnaren är noll, det vill säga när $b = 0$ eller $\triangle = 0$. Vilket tal multiplicerat med 0 ger något annat än 0? Det blir tydligt att det inte finns något tal som kan multipliceras med 0 och ge ett annat resultat än 0. Därav finns det inte heller något numeriskt svar till divisionen. Kvoten till division med noll i nämnaren är därmed odefinierad.

När det kommer till division där noll förekommer i täljaren kan sambandet mellan division och multiplikation också vara till stor hjälp för att visualisera beräkningen. Eleverna kan se att när noll enbart står i täljaren blir kvoten ett numeriskt tal likt divisioner där varken täljaren eller nämnaren är noll, se exempel i figur 3. Man kan därför argumentera för att noll i täljaren inte behöver presenteras som ett specifikt fall i läroböcker medan noll i nämnaren bör presenteras som det unika fall det är.

$$\frac{0}{4} = x \iff x \cdot 4 = 0 \implies x = 0$$
$$\frac{10}{2} = x \iff x \cdot 2 = 10 \implies x = 5$$

Figur 3. Exempel på division och multiplikation som motsatta räknesätt.

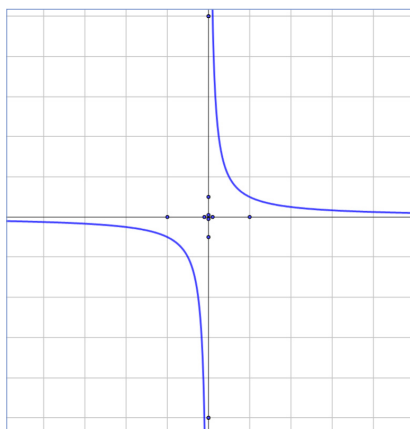
En didaktisk utmaning som framkom i vår litteraturstudie var att elever ofta övergeneraliserar att division med noll är odefinierad till att gälla *alla* divisioner som inkluderar noll. Flera elever trodde alltså att detta gällde oavsett om noll förekom i täljaren eller i nämnaren. Det belyser vikten av att tydligt särskilja nollans roll i olika positioner vid undervisning om division. Genom att använda exempel som de i figur 2 och 3 kan läraren konkretisera skillnaden mellan noll i täljaren och noll i nämnaren.

Gränsvärde som verktyg

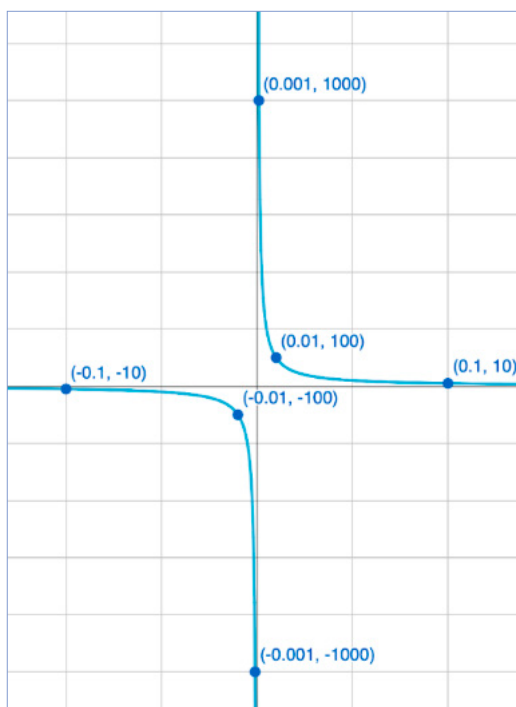
För de högre årskurserna kan man presentera metoden med gränsvärden som verktyg genom att visa hur kvoten växer när nämnaren blir mindre och mindre och närmar sig noll. Detta gäller för både positiva och negativa tal. Exempelvis:

$1/0,1 = 10$	$1/-0,1 = -10$
$1/0,01 = 100$	$1/-0,01 = -100$
$1/0,001 = 1000$	$1/-0,001 = -1000$
... och så vidare	... och så vidare

Kvoten närmar sig alltså två olika gränsvärden beroende på vilket håll vi närmar oss noll från, positiv eller negativ riktning. Dessa gränsvärden ger inget entydigt svar, och division med noll i nämnaren är därmed odefinierad, se figur 4 och 5.



Figur 4. En graf som illustrerar hur kvoten $1/x$ ser ut när x närmar sig noll från både positiv och negativ riktning.



Figur 5. Funktionen $f(x) = 1/x$ men med olika skalor på axlarna. Varje skalstreck på x -axeln motsvarar 0,05 medan varje streck på y -axeln motsvarar 200.

Denna metod kan dock skapa missförstånd hos elever. Det finns en risk att de får uppfattningen att kvoten vid division med noll blir oändlig. För att förebygga detta behöver läraren tydligt förklara att om ett uttryck tenderar att gå mot oändligheten innebär det inte att det når ett exakt värde. Snarare visar det att det inte finns någon gräns, att värdet växer utan att närma sig ett specifikt tal. Eftersom oändlighet har en symbol, ∞ , är det inte förvånande att elever ibland tolkar detta som ett mer konkret eller fullständigt svar än att ange att kvoten är *odefinierad*.

Det gåtfulla talet noll

Undersökningen visar att division med noll i både täljare och nämnare lyser starkt med sin frånvaro i läromedel. Detta leder i sin tur till att elever inte får en förståelse för de viktiga matematiska egenskaper som just talet noll har. Noll är centralt för förståelsen av negativa tal, särskilt i relation till talens placering på tallinjen och i samband med begrepp som symmetri kring nollpunkten. Utan en tydlig begreppslig grund riskerar elever att få en osammanhängande eller felaktig bild om nollans roll i olika matematiska sammanhang, exempelvis vid olikheter, gränsvärdesresonemang eller analys av funktioners beteende. Detta understryker behovet av att inkludera nollans unika egenskaper mer integrerat i matematikundervisningen.

Vår roll som lärare – mer än att följa läroboken

Läroböcker är ett bra hjälpmedel för lärare. Vi har under vår egen skolgång haft lärare vars undervisning grundats på läroböcker och än idag ser vi att lärare planerar utifrån dem. I den undersökning vi gjorde var fokus att undersöka om division med noll i täljaren respektive nämnaren förekom i läroböcker för mellan- och högstadiet. Att detta område i stor utsträckning var frånvarande blev för oss en väckarklocka. Vi som framtida lärare behöver vara uppmärksamma på att identifiera de områden som inte finns med i läroböckerna istället för att blint lita på att allt inkluderas i enlighet med läroplanen. Att den enda lärobok som tog upp division med noll i nämnaren hade bristande förklaringar innebär att man som lärare inte heller kan förlita sig på allt som står i läroböcker. Lärarens egen matematiska kunskap måste vara tillräckligt stor för att kunna uppmärksamma och komplettera brister som läroböcker har.

Vi är övertygade om att bra matematikundervisning handlar om mer än att ge ett korrekt svar. Det handlar snarare om att skapa nyfikenhet, visa samband och ge elever möjlighet att tänka och resonera själva. Vi anser att ovan nämnda metoder, för att förklara varför division med noll i nämnaren är odefinierad, ger eleverna möjlighet till djupare konceptuell förståelse. Med det sagt, vill vi bli lärare som vågar ta upp svåra frågor även om de inte finns i läroböcker och vi ser värdet i att förklara varför, inte bara hur.

Hallberg, A., Hillestrand, I. & Muhsin, F. (2025). *En gåtfull siffra; En studie om nollans historia och division med noll*. [Examensarbete, Göteborgs universitet]. <https://hdl.handle.net/2077/87569>