

Frågor i matematiska samtal

Att använda frågor för att utveckla elevers delaktighet i matematiska samtal har en grupp lärare jobbat med i ett ULF-projekt i Malmö. Här beskrivs arbetet med frågor i samband med problemlösningslektioner i årskurs 6 och 7.

Vad läraren gör i klassrummet har stor betydelse för hur elever kommer att agera, både i grupparbete och i helklassdiskussioner. Vi ville i denna studie undersöka vilka pedagogiska grepp som kan leda till att elevernas dialoger handlar om själva matematiken. Smågruppsdiskussioner kan vara ett inslag som ger mer varierad undervisning med fler delaktiga elever. Att ta steget från gruppernas samtal till en givande helklassdiskussion är utmanande. Lärare behöver ofta i stunden samla ihop gruppernas lösningar och tankar och kunna organisera dem på ett sätt som fördjupar elevernas förståelse.

Här beskriver vi ett forskningsprojekt som tre lärare och en forskare gjort tillsammans inom ett ULF-nätverk vid Malmö universitet. Vårt mål med projektet var att få alla elever aktiva. Vi ville få till mer givande gruppdiskussioner genom att trycka på att eleverna skulle ställa matematiska frågor till varandra. Ett annat mål var att utveckla den avslutande helklassdiskussionen. Vi provade olika konkreta metoder kring matematiska frågor och lärde oss om olika sorters frågor som elever ställer. En av slutsatserna är att läraren har en viktig roll i att ställa *varför-frågor* för att fördjupa själva matematiken.

Teacher noticing som metod

För att undersöka på vilka sätt frågor kan påverka matematiska diskussioner använde vi metoden *teacher noticing* som innehåller tre steg:

1. *Fokusera* Välja vad uppmärksamheten ska riktas mot.
2. *Tolka* Tolka en situation som har uppmärksammats.
3. *Agera* Göra val kring agerande utifrån tolkningen.

Exempelvis kan lärare fokusera på vilka frågor som ställs i klassrummet. Därefter tolkas situationen och elevernas tankar. Slutligen agerar läraren medvetet, till exempel genom att svara på en fråga eller välja att spara den till en kommande helklassdiskussion.

I projektet skilde vi mellan *hur-frågor*, som skildrar det Chevallard kallar matematikens praxis, och *varför-frågor*, som handlar om matematikens logos. Här ses praxis och logos som lika viktiga – elever behöver veta *hur* de ska göra procedurer, men också *varför* procedurerna fungerar.

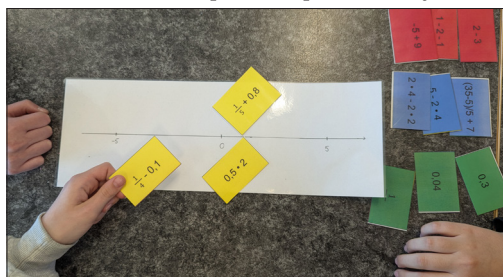
Genomförande och datainsamling

I projektet arbetade vi i tre cykler. I varje cykel valde vi ut något kring matematiska frågor som vi fokuserade på. Vi utvecklade tillsammans lektionsaktiviteter som genomfördes i årskurs 6 och 7 på två olika skolor. Vi filmade grupparbeten och helklassdiskussioner och analyserade vilka matematiska frågor som ställdes. Det som hände i klassrummet tolkades med hjälp av praxis och logos. Slutligen, det vi lärde oss i en cykel, påverkade vårt agerande, både spontant under lektionen och i nästa cykel.

Cykel 1 – Fishbowl och lyssnande efter matematiska frågor

I den första cykeln bestämde vi oss för att fokusera på vilken typ av frågor eleverna ställer till varandra under problemlösning i grupp. Vi valde att använda metoden *Fishbowl*, som vi hade mött under arbetet med Skolverkets moduler i matematiklyftet. Metoden går ut på att elever observerar varandra. När hälften av eleverna gruppvis försökte lösa ett problem stod de andra eleverna som tysta observatörer och noterade alla frågor som formulerades. Därefter växlade de roller så att de som observerat fick lösa sitt problem. I slutet av lektionen skrevs olika frågeformuleringar som observerats upp på tavlan.

I årskurs 6 handlade problemet om samband och förändring kopplat till koordinatsystem. I årskurs 7 handlade problemet om taluppfattning och hur tal placeras på en tallinje.



Det som märktes tydligt när eleverna redovisade vilka frågor de hört var att störst andel av frågorna kunde tolkas som allmänna processfrågor, där eleverna undrade hur de skulle gå tillväga. En mindre andel av frågorna hade ett matematiskt innehåll. Exempel på allmänna processfrågor var: "Hur tänkte du först?", "Gjorde du likadant?", "Har ni någon tanke?" Det kan bero på att vi lärare hade påpekat att ett syfte med dagens lektion var att få alla

delaktiga i det matematiska resonemanget. Eleverna ställde då denna typ av frågor till varandra för att få fler delaktiga i diskussionerna.

Under grupparbetena ställde eleverna i årskurs 6 även några matematiska frågor, till exempel: "Vad är 20 gånger 2?", "Ska vi börja med 200?", "Ska y-axeln gå upp till 1000?" och "Hur räknar man ut det?". Dessa frågor handlar om vilken teknik som ska användas för att lösa problemet. Varför-frågor var sällsynta. Under lektionen upptäcktes en sådan frågeformulering. Det var en elev som började fundera över hur grafer kan ritas och ställde frågan "Kan graferna korsa varandra?". Denna fråga lyftes av pedagogen i den avslutande helklassdiskussionen så alla fick ta del av den.

I årskurs 7 ställdes matematiska frågor såsom "Vad är $\frac{1}{4}$ av 5?" och "Är 0,8 plus 0,2 lika med 0,10?" när de arbetade med att placera ut tal på en tallinje. Även frågor om prioriteringsregler, såsom "Varför tar man multiplikation och division först?" tolkades som matematiska.

I den gemensamma analysen kom vi fram till att det såg likadant ut i alla grupper, i båda årskurserna. Allmänna processfrågor stack ut i antal, så det vi ville agera på i nästa cykel var att få eleverna att ställa fler frågor med matematiskt innehåll.

Cykel 2 – Rollspel och att bli medveten om matematiska frågor

För att medvetandegöra matematiska frågor för eleverna inledde vi lektionen i cykel 2 med ett rollspel utfört av pedagogerna i gruppen. Rollspelet var förberett för att visa på en variation i frågorna när pedagogerna löste ett problem. Eleverna fick även denna gång notera vilken typ av frågor som ställdes. De fick skriva ner vad de hörde i två kolumner, en med frågor som svarade på *hur* de skulle göra och den andra med frågor om *varför* man gjorde på ett visst sätt. Förhoppningen var att eleverna skulle bli mer varse den andra sortens frågeformulering. Efter rollspelet fick eleverna i årskurs 6 arbeta med uppgiften *Köpa böcker* inspirerad av boken *Rika matematiska problem*.

Katarina var på bokrea och köpte böcker. Hon köpte tre böcker för sammanlagt 460 kr, Rowlings, Widmark och Lindgren. Rowlings kostade 100 kr mer än Widmark. Lindgren kostade dubbelt så mycket som Widmark. Hur mycket kostade de olika böckerna?

Eleverna arbetade i grupper och de flesta började med att systematiskt pröva sig fram genom att skapa en tabell. De som blev klara fick utmaningen att försöka lösa problemet med en ekvation. När klassrumsinteraktionen sedan tolkades, gjordes det med hjälp av praxisfrågor och logosfrågor. Här delades praxis in i dels en *Uppgift* som eleverna skulle lösa, dels *Tekniker* som eleverna använde när de löste uppgiften. På samma sätt gjordes en analys av olika logosfrågor. Logos delades in i *Teknologi* som handlar om varför eleverna gör som de gör, och *Teori* som bygger på varför matematiken fungerar som den gör. I tabell 1 ges exempel på olika frågor som eleverna ställde.

Praxisfrågorna handlade om att ta reda på kostnaden för de olika böckerna och tekniken som kan användas för att göra det. Det kan handla om hur de skulle lösa uppgiften med hjälp av olika problemlösningsmetoder, till exempel rita en tabell eller prova sig fram. Det kan även vara hur man skriver uttryck och räknar med ekvationer.

Logosfrågorna var mer av formen att förstå skillnaden mellan att planlöst prova sig fram eller strukturerat arbeta sig fram mot en lösning i en tabell. Eller att förstå att uttrycket som skrivs ska stå för den totala summan och utifrån det veta hur man tecknar en ekvation där en boks pris tecknas som x och boken som är dubbelt så dyr tecknas som $2x$. I cykel 2 tolkades elevsamtalen som att det inte ställdes så många logosfrågor, utan de flesta matematiska frågorna var inriktade mot praxis. Detta ville vi agera på för att förändra i den tredje cykeln.



Fishbowl

Några elever löser uppgiften medan andra observerar.

Tabell 1. Frågor i cykel 2

Praxis – om görande	
<i>Uppgift</i> – Problemet "Köpa böcker"	<i>Teknik</i> – Hur eleverna gör
Frågor kopplade till uppgift. – Vad ska vi ha med i tabellen? – Vad kan skrivas för matematiska uttryck i tabellens rubriker för att visa vad som ska beräknas?	Frågor kopplade till teknik. – Ska vi testa 90 kr? – Ska vi skriva $x + x + 100 + x \cdot 2$? – Är = 460? – Kan man inte ta 460 – 100 och sen dela det med 4? – Hur räknade du ut Lindgren?
Logos – om vetande	
<i>Teknologi</i> Varför eleverna gör som de gör	<i>Teori</i> Matematiska definitioner och regler
Frågor kopplade till teknologi. – Varför kan vi inte dela med 3? I denna fråga vill en elev dela 460 kr med 3, de andra försöker övertyga hen om varför det inte går eftersom böckerna inte kostar lika mycket. I en annan grupp börjar eleverna med 100 kr för Widmark. De får fram att summan är 500 kr. Eleverna drar slutsatsen att det är för mycket. – Då kan vi testa något lite mindre. Ska vi testa 80 kr? Eleverna hamnar då på 420 kr och drar slutsatsen att Widmark måste kosta 90 kr. Ibland är frågorna matematiskt felaktiga, men leder diskussionen framåt. – Så om Widmark är x , då måste Lindgren vara x gånger x ?	Frågor kopplade till teori. I en grupp förs dialog mellan lärare och elever, där matematiken bakom likhetstecknet och vad en ekvation är diskuteras. Läraren: Vad är värdet på ena sidan i ekvationen? Elev: Böckerna! Läraren: Vad är då värdet på andra sidan? Elev: Hur mycket de kostar. Läraren: Kan ni skriva det som en ekvation? En elev i gruppen vänder sig till sina kamrater: Elev: Hur skulle man kunna skriva det som en ekvation? Gruppen löser därefter uppgiften genom att skriva och lösa en ekvation.

Cykel 3 – Helklassdiskussion med fokus på logosfrågor

I cykel 3 var fokus på att få till fler logosfrågor, och vi lärare agerade genom att medvetet lyssna efter och ställa denna typ av frågor, både till grupperna och i helklassdiskussionen. I årskurs 7 jobbade eleverna i grupper om tre, något vi har tidigare funnit vara optimalt för att få alla så aktiva som möjligt. De fick arbeta med ett problem ur boken *En hel del textuppgifter med Singapore-metoden: blockmodellen*.

Emma sålde sex gånger så många bullar som Oskar. Nike sålde hälften så många som Emma. Hur många bullar sålde Emma om de sålde 340 bullar tillsammans?

Under grupparbetet gick lärarna runt, lyssnade och ställde frågor som knuffade eleverna mot logostänkandet. Trots det var vår tolkning att eleverna fortfarande inte ställde så många logosfrågor. Vid helklassdiskussionen fick eleverna berätta om sina lösningar som vi summerade och strukturerade på tavlan. Efter tolkning delades elevlösningarna in i tre kategorier: a) att resonera logiskt, b) att pröva sig fram, antingen hejvilt eller systematiskt, eller c) att göra antagande och teckna uttryck, vilket till slut ledde fram till ekvationslösning. Såväl gruppernas arbete som helklassdiskussioner filmades och analyserades. Exempel på frågor som uppkom och ställdes finns redovisade i tabell 2.

Tabell 2. Frågor i cykel 3

Praxis – om görande	
Uppgift – Problemet "Bullar"	Teknik – Hur eleverna gör
Frågor kopplade till uppgift. Eleverna hade inga frågor kopplade till uppgiften vilket vi tolkade som att själva problemformuleringen var tydlig.	Frågor kopplade till teknik Elevfrågor: – Ifall man delar upp det på 10 kanske? – Vad är det du gör? – Vad gissade du då? – Alltså bokstaven O står för Oskar? – Men hur många sålde Emma då? – Ja, vadå, ska vi bara lösa ekvationen sen? Lärarfrågor: – Kan du förenkla det där uttrycket? – Kan ni berätta hur ni började er ekvation?
Logos – om vetande	
Teknologi – Varför eleverna gör som de gör	Teori – Matematiska definitioner och regler
Frågor kopplade till teknologi. Elevfråga: – Hur kan man veta att Nike har $x/2$ bullar? Lärarfrågor: – Varför delar ni med 10? – Varför multiplicerar du med 6? – Varför ska Nike delas med 2? – Varför tror ni vi gör det då? – Hur går det här nu, varför håller ni på att testa och dela 340 med det där?	Frågor kopplade till teori. Lärarfråga som stöttade elevers förståelse av vad en ekvation är, samt variablers betydelse: – Ni har bokstaven O där, ni har tre stycken O där och ... det är nästan som en ekvation, va?

Resultaten visade att det fortfarande var praxisfrågor som dominerade bland eleverna. De allra flesta logosfrågorna ställdes av oss lärare. Vi kunde också konstatera att dessa frågor ledde till mer utvecklade lösningar och djupare förståelse från elevernas sida, något som kom fram i helklassdiskussionen.

Helklassdiskussionen inleddes kring frågan varför man skulle dela med tio. Det visade sig i gruppernas diskussioner att det var svårt för eleverna att tolka uppgiftstexten till att helheten utgjorde tio delar. Detta kanske berodde på uppgiftens formulering som innehöll signalord som "sex gånger så många" och "hälften så många". Eleverna resonerade kring att Oskar stod för en del, Emma sex delar och Nike tre delar. Flera grupper prövade sig fram genom att dela med olika tal. De landade till slut i att dela med 10, även om de inte alltid förstod varför. Någon grupp gjorde det för att det var enkelt att dela med tio, medan andra grupper resonerade matematiskt.

I helklassdiskussionen gick vi tillsammans med eleverna igenom olika strategier för att lösa problemet, inom alla tre lösningskategorierna a, b och c. Då fick vi chans att ställa både praxis-frågor och logos-frågor. Just frågan "varför delar vi med 10" återkom vi till. Eleverna ställde inte den själva, kanske för att de inte förstod varför den var viktig. Det blev upp till oss lärare att utmana elevernas matematiska tänkande genom att ställa varför-frågor.

Resultat och reflektion över vad vi lärt oss

I alla tre cykler kunde vi se att eleverna ställde ytterst få matematiska logosfrågor, alltså frågor om varför de gör som de gör. Desto fler frågor handlade om vad eller hur de gör. Eleverna i årskurs 7 satt ofta bredvid varandra och tänkte högt, utan att ställa frågor, medan eleverna i årskurs 6 förde mer diskussioner med varandra. Den vanligaste sortens frågor i de diskussionerna var allmänna processfrågor som hjälpte grupparbetet framåt.

Vi lärde oss mycket om olika sorters frågor i cykel 1 och cykel 2, både om vilka frågor eleverna ställde och vilka de inte ställde. I cykel 3 fokuserade vi på att ta med oss vad vi hört i gruppdiskussionerna och lyfta detta i en avslutande helklassdiskussion där vi skulle ställa logosfrågor till grupperna, i syfte att lyfta matematikinnehållet till en högre nivå.

När det gäller eleverna i årskurs 7 tyckte vi att de tappat lite av metodiken från cykel 2, vilket först förvånade oss. Det kan ha berott på uppgiftens karaktär eller på att vi inte tillräckligt tydligt tryckte på vikten av att ställa frågor. Resultatet hade kanske blivit annorlunda om vi även denna gång utnyttjat fishbowl och rollspel som i cykel 1 och 2. En lärdom kan vara att elever inte automatiskt tar med sig rutiner från tidigare uppgifter utan hela tiden behöver påminnas och instrueras i hur uppgifter ska göras. De didaktiska frågorna är ständigt aktuella.

*"De didaktiska
frågorna är
ständigt aktuella"*

De tre cyklerna tillsammans gjorde att vi kunnat utveckla våra helklassdiskussioner och skapa större bredd på matematiskt innehåll och förståelse. Steget från grupp till helklass blev lyckat och vi kunde ordna elevernas lösningar och påvisa likheter och skillnader samt ställa logosfrågor till grupperna. Vi hade behövt ytterligare cykler för att få eleverna mer aktiva även i den gemensamma genomgången, så arbetet fortsätter!

En liten uppmaning på slutet från lärarna i projektet

Forskningsprojektet som vi har beskrivit i den här artikeln har gjorts som en del i ULF-nätverket *Ett brett matematikdidaktiskt nätverk* vid Malmö universitet 2023–2025. Vi vill uppmana alla matematiklärare som får möjlighet att delta i liknande praktikinära forskningsprojekt eftersom vi upplever att det har varit väldigt givande. Vi tycker att vår matematikundervisning har blivit mer varierad och elevaktiv.

Lärdomarna från projektet försöker vi sprida till kollegor på den egna skolan, med en förhoppning att denna modell kan bli ett stående inslag i matematikundervisningen. Därutöver hoppas vi också att det kan ge ringar på vattnet till skolor i närområdet som vi har utvecklingsarbete med.

LITTERATUR OCH FILM

- Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education*. Proceedings of the 4th conference of the European society for research in mathematics education. CERME 4.
- Hagland, K. Hedrén, R. & Taflin, E. (2011). *Rika matematiska problem*. Liber.
- Lindberg, D. & Christiansen, C. (2018). *En hel del textuppgifter med Singapore-metoden: blockmodellen*. Askunge Thorséns förlag.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. & Philipp, R. A. (2011). *Mathematics teacher noticing: seeing through teachers' eyes*. Taylor & Francis.
- Film om metoden "fishbowl" från Edutopia. *How to teach math as a social activity*. <https://www.youtube.com/watch?v=kZxNldBEU6o>