

Kontrast mellan uttrycksformer

Användning av olika uttrycksformer är en central del inom matematik. I denna artikel beskriver författarna hur kontraster mellan uttrycksformer kan bli ett verktyg för bättre matematiklärande.

Det finns olika typer av forskning som kan sägas stödja samma sorts didaktiska princip. Denna princip kan formuleras som att elever lär sig bättre om de inte får allt "serverat" för sig. Innebörden i denna princip är att elever lär sig bättre om det behövs viss ansträngning. I situationer när elever löser uppgifter i matematik kan denna ansträngning skapas till exempel genom att en uppgift kräver kreativa resonemang och inte endast imitativa resonemang. Det handlar om att elever då måste komma på en lösningsmetod på egen hand och inte få den beskriven, det vill säga att de inte får lösningsmetoden serverad.

Eftersom elever har olika förkunskaper kan samma situation upplevas olika avseende om och hur någon ansträngning behövs för att hantera situationen. Att lösa en andragradsekvation kan till exempel vara en rutinuppgift om eleven redan kan en specifik lösningsmetod. Men för en elev som nyss lärt sig lösa linjära ekvationer kan andragradsekvationen kräva stor ansträngning och i praktiken kanske vara omöjlig att lösa. På liknande sätt kan addition av tresiffriga tal vara en rutinuppgift för vissa elever men kräva stor ansträngning för andra elever.

Principen att elever lär sig bättre om det behövs viss ansträngning kan därmed behöva specificeras. Det måste vara en rimlig nivå på den ansträngning som behövs, vilket kan vara olika för olika elever. Därför kan en specificering av principen vara att det är *produktiv ansträngning* som är bra, vilket också lyfts fram av forskning, där begreppet *productive struggle* används på engelska. Här presenterar vi hur kontraster mellan olika uttrycksformer i matematik kan vara bra, eller ibland mindre bra, för utveckling av elevers förståelse av matematiska begrepp, genom att skapa behov av produktiv ansträngning.

Tillsammans med lärare i Örnköldsvik har vi inom ett praktiktäna forskningsprojekt undersökt om och hur ett fokus på kontraster mellan uttrycksformer kan vara bra för elevers lärande och användbart i planering och uppföljning av undervisning. Vi beskriver här vissa erfarenheter från det projektet.

Vad avses med kontrast mellan uttrycksformer?

Uttrycksformer kan sägas avse de resurser som används för att kommunicera. Här kan bland annat inkluderas ord, bilder, symboler och diagram. Även till exempel gester och ansiktsuttryck kan inkluderas, vilket vi dock inte fokuserar på i denna artikel.

Uttrycksformer har en central roll i matematikämnet. Dels beskrivs i läroplaner för skolan att elever ska kunna använda sig av matematikens olika uttrycksformer. Dels kan matematikämnet sägas ha ett särskilt fokus på att relatera olika uttrycksformer till varandra. Till exempel kan det handla om att använda matematikens symbolspråk inom aritmetik och algebra för att beskriva konkreta situationer och händelser, vilket relaterar till aspekter av modellering. Det kan också handla om att översätta mellan olika uttrycksformer inom matematik, såsom att beskriva funktioner med symboler, grafer eller tabeller.

När olika uttrycksformer används kan alltså fokus ibland vara på att försöka säga samma sak på olika sätt, eller åtminstone att det som sägs med olika uttrycksformer hänger ihop och inte är motsägande. Kontrast kan också användas didaktiskt för att eleverna ska behöva anstränga sig för att klargöra det som presenteras och få syn på viktiga aspekter. Detta kan sägas handla om att skapa kontraster mellan uttrycksformer, vilket i forskning har beskrivits som "tension between semiotic modes".

Kontrast mellan uttrycksformer avser alltså att det finns någon typ av motsägelse eller att olika delar inte är direkt sammanhängande. Ett exempel på en kontrast mellan uttrycksformer som kan ses som en motsägelse är att med ord beskriva addition som *ökning* och samtidigt med symboler beskriva exemplet $4 + 0 = 4$. Ett annat exempel på en kontrast mellan uttrycksformer är när det inte är en motsägelse men där olika saker kan framträda genom olika uttrycksformer, och det inte explicit anges eller är helt tydligt hur dessa olika saker hänger samman. Detta kan till exempel vara att i ett avsnitt där subtraktion introducerats som *minskning* visa exemplet som syns i figur 1.

$$5 - 2 = 3$$


Figur 1.

Där anges en subtraktion med siffror och bilder med 5 objekt, 2 objekt och 3 objekt. Här visar bilden endast talen och inte subtraktionen, men den skulle kunna tolkas som att avse en *jämförelse* mellan två mängder av objekt och inte en minskning av ett antal objekt inom en mängd. Fler exempel på kontraster mellan uttrycksformer finns i nästa avsnitt.

Kontraster kan naturligtvis också finnas inom en enda uttrycksform. Men i denna artikel fokuserar vi på kontraster mellan uttrycksformer eftersom samspelet mellan olika uttrycksformer är så centralt för matematik, där det är viktigt för elevers lärande att fundera på om och hur olika uttrycksformer hänger samman.

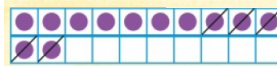
Kontrast mellan uttrycksformer i elevers arbete

I projektet avgränsade vi oss till subtraktion på lågstadiet. I en del av projektet fick eleverna arbeta i par med olika uppgifter som innehöll olika uttrycksformer, där vi ville undersöka hur de hanterar eventuella kontraster. Vi ger här exempel på två sådana uppgifter.

Strategin att först subtrahera till tioalet

I flera läromedel har vi sett en strategi beskrivas som handlar om att genomföra en subtraktion i två steg, när det går över tial, vilket illustreras på olika sätt. Vi gav eleverna en sådan beskrivning som visas i figur 2, hämtad från läromedlet Favorit matematik

Subtrahera först till tioalet.
Subtrahera sedan resten.

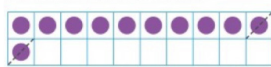


$$\begin{aligned}
 &12 - 5 \\
 &= 12 - 2 - 3 \\
 &= 10 - 3 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

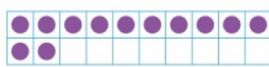
Figur 2.

1B, kapitel 24. Där finns det olika uttrycksformer: beskrivning med ord, illustration med rutor och beräkning med siffror. Eleverna fick också i uppgift att genomföra en beräkning enligt de instruktioner som syns i figur 3. Därefter ombads eleverna att göra en egen liknande uppgift.

Dra streck. Subtrahera.



a. $11 - 2 =$

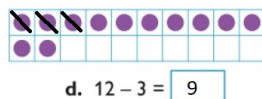


d. $12 - 3 =$

Figur 3.

Vi såg exempel i elevernas arbete som visar att beskrivningen av denna strategi inte har fungerat så bra. Genom elevernas lösningar synliggjordes att det finns kontraster mellan uttrycksformer som inte har varit produktiva, enligt följande resonemang.

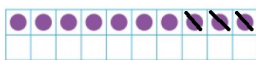
För det första visar illustrationen med rutorna i läroboken inte beräkningsprocessen såsom den beskrivs med ord och visas med symboler, se figur 2. De olika uttrycksformerna är inte direkt motsägande, men det finns viss kontrast mellan dem eftersom de inte tydligt beskriver samma sak. Eleven behöver själv tolka hur processen framställs i illustrationen, med att först stryka 2 prickar på undre raden och sedan 3 på övre raden. Här finns därmed en potential för lärande, avseende att förstå hur subtraktionsberäkningar kan beskrivas och illustreras på olika sätt. En schematisk illustration av några elevers lösning på beräkningen $12 - 3$ syns i figur 4. Den visar att eleverna inte uppmärksammat den avsedda beräkningsprocessen. Istället har de hanterat prickarna som en oorganiserad mängd där 3 stycken har tagits bort och de har sedan räknat hur många som finns kvar.



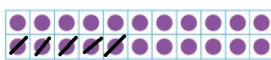
d. $12 - 3 =$

Figur 4.

För det andra finns också en annan typ av kontrast mellan illustrationen och den strategi som beskrivs med ord och symboler i figur 2. Illustrationen tydliggör inget behov av strategin att först subtrahera till tiotalet. Tvärtom är den strategin onödigt komplex i relation till illustrationen. Det är enklare, och mer rimligt, att direkt stryka alla prickar som ska bort och sedan se hur många som är kvar, vilket eleverna också fokuserade på i sina beskrivningar. En schematisk illustration av några elevers skapade uppgifter syns i figur 5. Där syns att eleverna har fokuserat på att skapa en mängd prickar och sen ta bort ett antal prickar från denna mängd, där eleverna i det högra exemplet fokuserade endast på den undre raden, som är 11 prickar lång.



$10 - 3 =$



$11 - 5$

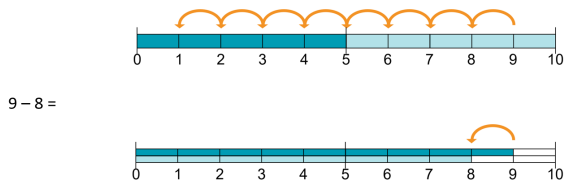
Figur 5. En schematisk illustration av uppgifter som eleverna skapade.

Denna andra typ av kontrast kan sägas vara mer motsägande, eftersom ord och symboler beskriver något som inte är relevant eller lämpligt i illustrationen. Kontrasten gör att eleverna helt missar den strategi som var i fokus, och ledde eleverna bort från det innehåll som skulle läras. Kanske finns det någon annan typ av illustration som skulle varit mer passande för denna strategi. Eller så kanske illustrationen helt kunde tas bort för att få eleven att fokusera på det som beskrivs med ord och med symboler, vilket kanske i första hand kan kopplas till huvudräkning, för att tydliggöra behovet av denna strategi.

Olika betydelser av subtraktion på tallinjen

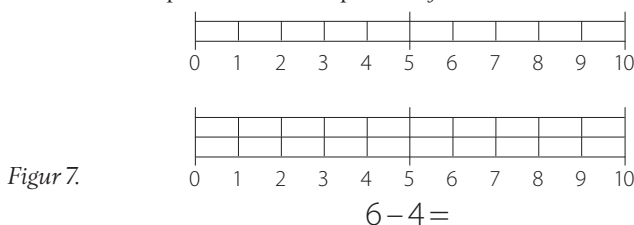
I läromedel beskrivs vanligen två olika betydelser av subtraktion, dels som minskning, dels som jämförelse. Från tidigare studier vet vi att läromedel primärt beskriver subtraktion som minskning. Dessutom verkar det vara ovanligt i läromedel att båda betydelserna beskrivs samtidigt. Men det finns en potential för lärande i att hantera dessa betydelser samtidigt, för att inse att det är olika perspektiv på samma sak.

Med detta som utgångspunkt skapade vi en aktivitet för eleverna där de två olika betydelserna av subtraktion beskrevs på en tallinje. Illustrationer av subtraktion på tallinjen inspirerades från läromedlet Rik matematik 1A, kapitel 5, men presenterades och kombinerades på ett lite annorlunda sätt.



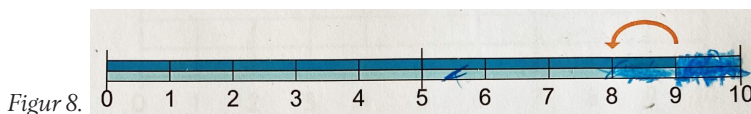
Figur 6. Den övre tallinjen visar subtraktion som minskning och den nedre visar subtraktion som jämförelse.

Eleverna fick se det som visas i figur 6 och sedan bad vi dem att illustrera en ny beräkning på samma sätt med det som syns i figur 7. Avsikten med denna aktivitet var att eleverna skulle kunna uppleva en kontrast mellan uttrycksformer eftersom de kan behöva fundera på hur en beskrivning med siffror kan illustreras på två olika sätt på tallinjen.



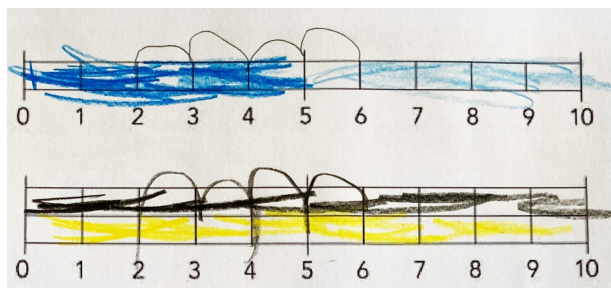
Figur 7.

I elevernas arbete med uppgiften i figur 7 noterade vi dels en onödig kontrast avseende hur färger används, dels att kontrasten avseende olika betydelser av subtraktion blev för stor. I exemplet i figur 6 som visades för eleverna finns en kontrast avseende färger eftersom färgerna inte har samma funktion i den enkla tallinjen som i den dubbla tallinjen. Eleverna fokuserade också på denna kontrast genom att de arbetade med att färglägga tallinjerna. Till exempel målade eleverna det vita området i den dubbla tallinjen i exemplet, och de målade också tallinjerna när de skulle arbeta med $6 - 4$, vilket visas exempel på i figur 8 och 9. Eleverna fokuserade på att ytor skulle färgläggas på liknande sätt, utan att se någon innebörd i olika färgläggningar. Denna kontrast är därmed onödig eftersom den inte fick eleverna att uppmärksamma betydelsen av subtraktion, vilket var syftet med uppgiften.



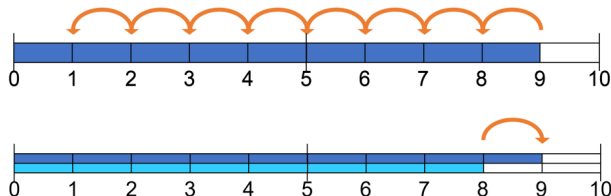
Figur 8.

Avseende pilarna på tallinjerna så tolkade eleverna aldrig pilen på den dubbla tallinjen som att avse en annan betydelse av subtraktion jämfört med pilarna på den enkla tallinjen. Istället använde eleverna konsekvent ett synsätt på subtraktion som minskning. Till exempel beskrev elever att pilen på den dubbla tallinjen visade starten på beräkningen och de fyllde sedan på med fler pilar eller bågar så att utseendet blev såsom på den enkla tallinjen. Vid illustration av $6 - 4$ i figur 9 ritade eleverna också pilar på den dubbla tallinjen som visar subtraktion som minskning. Det blev alltså aldrig en utmaning för eleverna att förhålla sig till olika betydelser av subtraktion eftersom de aldrig upplevde en kontrast. Vår tolkning är därför att kontrasten var alltför stor



Figur 9.

mellan de olika tallinjerna i relation till beräkningen med siffror. För att få elever att uppleva en kontrast och uppmärksamma de olika betydelserna av subtraktion modifierade vi aktiviteten till nya elever. För det första tog vi bort den onödiga kontrasten kring färger. I den modifierade aktiviteten användes färg konsekvent för att illustrera aktuella tal på tallinjerna, enligt figur 10.



Figur 10.

För det andra skapade vi ett sammanhang som syftade till att ge en lämplig nivå på kontrasten mellan de olika tallinjerna och beräkningen med siffror. Avsikten var att tydliggöra för eleverna att det handlar om två olika betydelser av subtraktion, så att eleverna inte kunde tolka allt som minskning. De två betydelserna beskrevs som att två barn räknar samma sak på olika sätt. För att tydliggöra olika betydelser av de tal som ingår i subtraktionen visades deras sätt att beräkna $9 - 8$ med enkla animeringar av pilar på tallinjerna. Animeringarna bestod av att pilarna ovanför tallinjen skapades ett steg i taget från 9 till 1 för den första betydelsen samt att steget mellan 9 och 8 animerades först bakåt och sedan framåt för den andra betydelsen, där slutstegen av de båda animeringarna syns i figur 10. Sedan skulle eleverna beräkna $6 - 4$ på samma sätt som de två barnen gjort i animeringen.

I elevernas arbete med den modifierade aktiviteten noterade vi att de överlag var engagerade med att beskriva och förstå skillnaderna mellan de olika beräkningssätten. Den nya versionen fick alltså eleverna att fokusera på

det som var avsikten. Bland eleverna varierade det dock avseende på vilket sätt eller hur väl de beskrev och använde de två beräkningssätten. Generellt var det subtraktion som jämförelse som orsakade utmaningar för eleverna.

Vissa elever fokuserade på likheter och skillnader mellan de två beräkningssätten, det vill säga det primära var kontrast mellan de två illustrationerna på tallinjen, vilket även inkluderar relationer till den subtraktion som anges med symboler. Till exempel beskrev vissa elever att det handlar om att räkna bakåt respektive framåt, såsom att börja på 9 eller 8 i beräkning av $9 - 8$.

Andra elever beskrev att det handlar om att stega flera gånger respektive en gång, vilket baseras på att det i det specifika exemplet är endast ett steg mellan 9 och 8 när subtraktionen beräknas som jämförelse. Andra elever fokuserade på hur beräkningen med den dubbla tallinjen kan vara en beskrivning av den subtraktion som anges med symboler, vilket alltså utgjorde den primära kontrasten för dem. Eleverna kunde använda båda beräkningssätten, inklusive korrekt illustration på tallinjen och kunde beskriva skillnader i hur de genomförs. Men vissa elever hade svårt att beskriva betydelsen av subtraktion som jämförelse, där de ibland använde beskrivningar som handlade om minskning.

Som helhet noterar vi att eleverna kan delas in i tre grupper, avseende hur de upplevde och hanterade kontraster mellan olika delar i beskrivningen av subtraktion. För det första fanns elever för vilka kontrasten fortsatt var för stor. De beskrev likheter och skillnader mellan beräkningssätten på ett sätt som inte primärt berörde betydelsen av subtraktion. Dessa elever kanske först skulle behövt jobba mer separat med subtraktion som jämförelse innan de olika betydelserna relateras till varandra. För det andra fanns elever där kontrasten verkar ha hamnat på en lagom nivå. Dessa elever beskrev till exempel hur de såg jämförelse som ett nytt och smart sätt att beräkna subtraktion. För det tredje fanns elever där kontrasten kanske blev för liten, avseende en alltför utförlig beskrivning av hur de två barnen genomför subtraktionsberäkningen. För dessa elever hamnade fokus på att genomföra subtraktionen på två sätt, avseende två olika procedurer, utan att beskriva olika betydelser av subtraktion.

Principer för kontraster mellan uttrycksformer

Baserat på analyser av elevernas arbete och vårt samarbete med lärarna beskriver vi tre principer kring att fokusera på kontraster mellan uttrycksformer och hur dessa principer kan användas i undervisning.

1. Att det finns kontrast

Denna princip handlar om att inte endast fokusera på att beskriva eller förklara allt så tydligt som möjligt för elever. Det är bra för deras lärande om det finns någon kontrast som kräver ansträngning att hantera. Lärare som deltog i projektet reflekterade kring denna princip under projektets gång. De beskrev hur deras tankesätt och förhållningssätt ändrades i och med arbetet i projektet. Till exempel beskrev lärarna hur de tidigare främst fokuserat på att förklara tydligare för elever som inte förstått en specifik sak men att de nu också tänker på hur skapandet av en kontrast kan hjälpa elever vidare i att utveckla sitt kunnande och sätt att tänka.

2. Att kontrasten är produktiv

Denna princip betyder att kontrasten ska handla om det aktuella matematiska innehållet, så att elever styrs att fokusera sitt tankearbete och sin ansträngning på detta innehåll. Detta innefattar att det inte ska finnas onödiga kontraster där elever riskerar att fastna på irrelevanta saker. I exemplet med strategin att först subtrahera till tiotalet fanns sådan onödig kontrast eftersom illustrationen inte tydliggjorde behovet av strategin. Det behöver alltså finnas en tät sammankoppling mellan kontrasten och det som eleverna är tänkta att lära sig. Det handlar därmed inte bara om att något ska vara svårt och ansträngande. Om elever lyckas överbrygga kontrasten så ska de ha lärt sig något nytt om det aktuella matematiska innehållet.

3. Att kontrasten är på lagom nivå

Även om en kontrast är produktiv, det vill säga riktar elevers fokus till relevant matematiskt innehåll, så kan kontrasten vara alltför stor. Då behövs anpassning till enskilda elever eller grupper av elever. I exemplet med olika betydelser av subtraktion på tallinjen gjordes en sådan anpassning genom att skapa fler beskrivningar av ett sammanhang så att inte också detta blev en del av kontrasten som eleverna upplevde. I det exemplet syns också den generella utmaningen i att anpassa undervisningen till elever med olika förkunskaper.

Applicerings av principerna

De tre principerna kan vara användbara på olika sätt i arbetet med att planera, genomföra och följa upp sin undervisning. Här beskrivs två användningsområden som exempel på detta.

1. Egenskaper hos presentationer och uppgifter

Principerna kan användas för att granska befintliga presentationer eller uppgifter. I detta kan ingå att leta efter kontraster och sen avgöra om de är produktiva och på lagom nivå. Om det exempelvis inte finns någon kontrast alls kan någon kontrast tillföras, med fokus på att göra den produktiv och på lagom nivå. Om det finns kontraster som inte är produktiva kan onödiga kontraster tas bort.

2. Elevers arbete

Principerna kan också användas för att försöka förstå och hantera de utmaningar elever har i en viss situation. Om det exempelvis är situationer då elever har svårigheter att ta sig an en kontrast kan denna kontrast behöva reduceras eller ändras på annat sätt för att rikta elevens fokus rätt. Detta kan då hanteras på samma sätt som beskrivs i punkt 1. På liknande sätt kan specifika kontraster skapas för att hjälpa elever överbrygga andra typer av svårigheter istället för att berätta lösningar, vilket enligt principerna bör undvikas. I situationer när elever inte upplever någon kontrast, men där de borde göra det, skulle anpassning behövas av presentationen eller uppgiften, såsom gjordes i exemplet med olika betydelser av subtraktion på tallinjen.

Avslutande kommentarer

I den här artikeln har vi beskrivit principer som kan användas vid planering, genomförande och uppföljning av undervisning. Det finns inga principer som täcker in all undervisning, men vi ser en viss bredd i möjligheter att använda principerna kring kontrast mellan uttrycksformer, enligt följande tre delar.

För det första är principerna tillräckligt generella för att vara applicerbara oavsett ämnesinnehåll och typer av kunskaper. Samtidigt fokuserar principerna på koppling till det matematikinnehåll som ska behandlas, så att principerna inte blir separerade från lärandemål för eleverna.

För det andra är principerna användbara både för beskrivningar/förklaringar (av lärare eller lärobok) och för uppgifter/aktiviteter, inklusive samspillet mellan dessa. Till exempel kan en kontrast finnas mellan vad som sägs i en beskrivning/förklaring i en lärobok och vad som sedan krävs av elever i efterföljande uppgifter. Detta finns i exemplet med strategin att först subtrahera till tiotalet.

För det tredje fokuserar principerna på konkreta egenskaper i beskrivningar/förklaringar eller uppgifter/aktiviteter, avseende uttrycksformer, vilket kan göra dem mer direkt användbara.

Angående hur användbara dessa principer är så är det ju alltid lättare att beskriva principer än att omsätta dessa i praktiken. Vår bedömning är att det är enklare att använda principer för kontraster mellan uttrycksformer när befintliga saker granskas, till exempel avseende om och hur det finns kontraster mellan olika delar i en lärobok. Det kan vara svårare att använda principerna för att anpassa eller skapa material i undervisningen, speciellt eftersom det då finns mer frihet i hur det kan göras. Därmed är principerna nog mest användbara i planering och uppföljning av lektioner. Det är också där vi har testat att arbeta med ett fokus på kontraster mellan uttrycksformer, där det upplevts som användbart av medverkande lärare.

Vi vill tacka de elever som deltagit i projektet samt de lärare som möjliggjort för oss att få besöka eleverna och som medverkat i diskussioner av elevernas arbete. Alla figurer från läromedel inkluderas här med tillstånd från förlaget. Arbetet som beskrivs i denna artikel har bedrivits tack vare bidrag från Skolforskningsinstitutet (2020-00073).

LITTERATUR

- D'Arcy, D. & Olsson, J. (2019). *Att undervisa matematik för kreativa resone-mang*. Nämnaren, 2019:4.
- Engelbrechtsen, M. (2012). Balancing cohesion and tension in multimodal rhetoric. An interdisciplinary approach to the study of semiotic complexity. *Learning, Media and Technology*, 37(2), 145–162.
- Young, J.R., Bevan, D. & Sanders, M. (2024). How productive is the productive struggle? Lessons learned from a scoping review. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 12(2), 470–495.