

Proportionalitet med T-tabeller

I syfte att utveckla undervisningen skapade en grupp lärare tillsammans med NCM en fortbildningskurs under en termin. Temat var problemlösning som medel för att lära om proportionalitet. Som ett resultat av kursen utvecklade lärarna tre lektioner om proportionalitet där T-tabeller användes som verktyg.

Höstterminen 2023 kontaktades NCM av några mycket entusiastiska låg- och mellanstadielärare från Hjortakroksskolan i Sölvesborg som frågade om vi kunde stötta dem i ett mindre utvecklingsarbete. I sitt systematiska kvalitetsarbete hade de identifierat att problemlösning var ett område som behövde utvecklas, men de visste inte hur de skulle gå till väga. Under ett digitalt möte resonerade vi tillsammans om vad de specifikt behövde utveckla i undervisningen. Med lite guidning kom de fram till att de ville fokusera problemlösning som medel för att lära sig ett matematiskt innehåll, och att det matematiska innehållet skulle vara proportionalitet. Det togs ett beslut att NCM skulle skapa en kurs på fyra träffar à 2 timmar under den kommande vårterminen och att det skulle ges utrymme för lärarna att läsa texter och genomföra uppgifter i klassrummen mellan träffarna.

Kort om kursens innehåll

För att göra något nytt och förhoppningsvis bättre i undervisningen var det viktigt att lärarna började med att fördjupa sig om undervisning i problemlösning och proportionalitet, det vill säga så mycket som det gick på de få tillfällena. De fick arbeta med uppgifters karaktär, uppgifter som har potential att engagera elever så att de kan utveckla sina tankar och resonemang om det matematiska innehållet. Lärarna läste några texter om proportionalitet som var obligatoriska för alla samt några som var valfria utifrån intresse och att de var adekvata för deras klass. En text som fick stort genomslag var Nämnarenartikeln *T-tabeller som ett verktyg för proportionella resonemang*. Vid den näst sista träffen fick lärarna sitta årskursvis och planera en lektion, vilket innebar att de fick ta fram en kognitivt utmanande uppgift om proportionalitet, sätta mål för lektionen, förutse elevlösningar och planera för ett uppföljande samtal som skulle sikta mot målet för lektionen. Den planerade lektionen genomfördes inför sista träffen och lärarna samlade in några intressanta elevlösningar och skrev ner sina reflektioner.

Redovisning av de genomförda lektionerna

Under den sista träffen reflekterade lärarna över den genomförda undervisningen och knöt samman den med texterna som de hade läst för att dra lärdomar. De tillverkade en presentation som de redovisade för sina kollegor. Nedan beskrivs de tre lektionerna och lärarnas lärdomar.

Årskurs 1 – Chokladmjölk

Lärarnas syfte med lektionen var att uppmärksamma sambandet mellan dubbelt och hälften. De hittade en uppgift om recept på nätet som de blev inspirerade av och anpassade den till något som kunde ligga närmre elevernas vardag – att blanda chokladmjölk.

Eleverna hade arbetat med hälften och dubbelt tidigare, men det hade inte kopplats till att det är multiplikativt och att det finns ett samband mellan $2 \cdot 4$ och $8/2$. Eleverna hade inte heller fått använda sig av en T-tabell. Det som var nytt för eleverna i hur undervisningen bedrevs var att lärarna inte inledde lektionen med en genomgång där strategier presenterades, utan de ville få eleverna att tänka själva och upptäcka mönstret i tabellen. De avslöjade heller inte målet för lektionen.

Uppgifterna handlade om att göra chokladmjölk med rätt proportioner. Det fanns fyra uppgifter med olika svårighetsgrad. Alla elever startade med den enklaste och fortsatte sedan med mer utmanande uppgifter utifrån den takt som de arbetade i. Förutom arbetsbladen fick eleverna tillgång till miniwhiteboard och laborativt material. Eleverna arbetade i homogena par. Lärarna hade förberett stödfrågor, så som "Hur tänker du?", "Berätta för mig ...", för att säkerställa att de inte skulle lotsa dem under arbetet.

		
1 glas	2 del mjölk	4 choklad
2 glas	4	8
3 glas	6	12
4 glas	8	16
5 glas	10	20
6 glas	12	24
7 glas	14	28
8 glas	16	32
9 glas	18	36
10 glas	20	40

Den näst enklaste uppgiften.
Vi tog dubbelt, sa Petter.

		
1 glas	2 mjölk	4 choklad
2 glas	4	8 choklad
3 glas	6	12 choklad
4 glas	8	16 choklad
5 glas	10	20 choklad
6 glas	12	24 choklad
7 glas	14	28 choklad
8 glas	16	32 choklad
9 glas	18	36 choklad
10 glas	20	40 choklad

Den mest utmanande uppgiften.
Vi tänkte hälften, sa Oskar.

Lektionen avslutades med att olika elevlösningar presenterades med hjälp av en projektor och paren fick förklara hur de hade tänkt för att lära av varandra. De som hade gjort fel fick förklara sina lösningar först för att säkerställa att man hann diskutera deras svar. Elevernas olika strategier var: vi tänkte tvåskutt, vi hoppade fyra steg, dubbelt så mycket, hälften så mycket, vi räknade gånger, vi ser mönster och lika mycket.

En av lärarnas lärdomar var att det var en framgångsfaktor att inte berätta målet för lektionen och att inte gå in på strategier vid genomgången då det möjliggjorde att eleverna utmanades och tänkte fritt. Om de hade gjort som tidigare hade det funnits en risk att de redan inför pararbetet hade lett in eleverna på uppgiftens svar.

Årskurs 2 – Kroppen

Eleverna i årskurs 2 var sedan tidigare vana vid att arbeta med öppna problem. Klassrumsklimatet var tillåtande och eleverna brukade redovisa sina lösningar för varandra och berätta hur de tänkte.

Det lärarna ville uppnå vid detta tillfälle var att eleverna, med hjälp av en T-tabell, skulle upptäcka ett mönster, sambandet mellan dubbelt och hälften, det vill säga ett proportionellt (multiplikativt) förhållande. Eleverna arbetade enskilt med uppgifterna, redovisade sin lösning för en klasskamrat och redovisade slutligen för alla.

Lärarna valde att introducera T-tabellen med hjälp av en startuppgift om hästar och hovar. Som stöd för att lösa uppgiften fick eleverna tillgång till ett arbetsblad med en tabell, miniwhiteboard och laborativt material såsom klossar.

I en hage finns det 12 hovar. Hur många hästar är i hagen?

Om det finns 24 hovar, hur många hästar är det då?

Om det finns 120 hovar, hur många hästar är det då?

Om det finns 360 hovar, hur många hästar är det då?

Under tiden som eleverna arbetade gick lärarna runt och stöttade eleverna i deras tankar och började välja ut lämpliga elevlösningar för redovisning. Under redovisningen ställde lärarna frågor för att få fram elevernas tankar. I lösningen till höger har eleven kopplat ihop 3 och 12 med 30 och 120.

När eleverna nu hade blivit bekanta med att använda T-tabellen fick de huvuduppgiften *Kroppen*, som handlar om dubbelt och hälften. Eleverna fick tillgång till samma material som vid startuppgiften.

På BB finns det 8 fötter. Hur många barn är födda?

Om det finns 32 fötter, hur många barn är då födda?

Om det finns 80 fötter, hur många barn är då födda?

Om det finns 320 fötter, hur många barn är då födda?

Om det finns 960 fötter, hur många barn är då födda?

Precis som i andra klasser fanns det en variation i elevernas förmågor som synliggjordes i hur eleverna löste uppgiften. En del elever klarade endast den första frågan med åtta fötter, sedan blev det för svårt eftersom dessa elever inte hade befäst addition och subtraktion inom talområdet 0–20.

Vissa elever arbetade metodiskt och beräknade först 1 barn, 2 barn, 3 barn för att ta sig fram till det efterfrågade antalet barn. Till höger ser vi Novas lösning. Det blev tidsödande och hon hann inte färdigt. På de sista raderna hade hon försökt en ny strategi men sedan suddat ut det hon skrivit. Notera att tabellen blivit fel eftersom hon misssade 13 barn. Det tyder på att hon inte dubblerat antal barn för att beräkna antal fötter utan att hon adderat ett för varje rad i vänster kolumn och 2 för varje rad i höger kolumn. Nova fokuserar tal-mönstret i kolumnen (2-skutt) snarare än sambandet mellan antal barn och antal fötter (dubbelt).

hästar	hovar
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
8	32
9	36
30	120
90	360

barn	fötter	barn	fötter
1	2	15	28
2	4	16	30
3	6	17	32
4	8	18	34
5	10	19	36
6	12	20	38
7	14	21	40
8	16	22	42
9	18	23	44
10	20	64	80
11	22	320	90
12	24	960	660
14	26		

Andra elever upptäckte direkt att det handlade om att dubblara, och kunde även utnyttja multiplikation med 10: 16 barn har 32 fötter så 160 barn har 320 fötter. Harry har skrivit in de tal i tabellen han har nytta av, och även kunnat formulera de mönster han upptäckt och de strategier han använt. På arbetsbladet fanns en ruta med rubriken "Mattespråk". Där har Harry skrivit:

$$40 + 40 = 80$$

$$8 + 8 = 16$$

$$80 + 16 = 96$$

och om man leger till en nola så blir det 960

barn	fötter
4	8
16	32
40	80
160	320
480	960
1	2
2	4
5	10
3	6

En lärdom som lärarna gjorde var att eleverna först behöver möta en uppgift med låg ingångströskel innan de tar sig an en större utmaning, samtidigt som det måste finnas en balans i att inte avslöja för mycket. Lärarna ansåg även att de behövde arbeta mer med färdighetsträning med denna elevgrupp för att förstärka elevernas möjlighet att delta i kommunikationen, testa sina idéer i gemensamma diskussioner och för att lösa problem med högre tal.

Årskurs 5 – JoggarN

Lärarna skapade en uppgift som skulle testa elevernas kunskaper inom proportionalitet. Uppgiften var i tre delar där den första delen (a) hade en låg ingångströskel för att alla elever skulle ha möjlighet att komma igång med uppgiften. Därefter blev det en stegring i svårighetsgrad då eleverna behövde göra uträkningar i flera led. Eleverna fick enbart tillgång till ett tomt arbetsblad då uppgiften gick att lösa med hjälp av fler representationsformer, men där förhoppningen var att eleverna självmant skulle välja en T-tabell.

Inför lektionen hade lärarna haft genomgång om hur en T-tabell kan användas som ett verktyg. Eleverna fick läxor med uppgifter som de skulle lösa med hjälp av en T-tabell. Lösningarna togs med tillbaka till klassen och presenterades. Eleverna hade därmed goda kunskaper om T-tabeller och behövde ingen särskild genomgång innan de enskilt fick arbeta med uppgiften *JoggarN*.

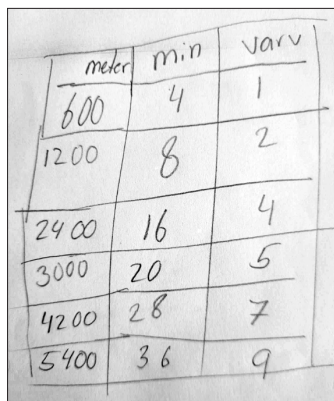
Under lektionen intog lärarna en ganska passiv roll samtidigt som de då och då gav tips som lotsade in eleverna på hur de kunde ta sig an uppgiften. I slutet av lektionen presenterades både några korrekta och felaktiga lösningar där eleverna hade möjlighet att dra lärdomar utifrån resonemanget. Det som var tydligt var att de elever som använde T-tabellen för att lösa uppgiften hade strukturerade lösningar och kom fram till korrekta svar till skillnad från de som inte använde tabellen. Något som lärarna också la märke till var att eleverna hade svårt för att lösa rutinuppgifter när talen var satta i en läsuppgift till skillnad från när de fick rutinuppgifter och räknesättet var angivet.

Det tar 8 minuter för Laila att jogga 2 varv runt en bana. Hon springer lika fort hela tiden.

- Hur lång tid tar det för Laila att jogga 5 varv?
- Hur många varv joggar Laila på 28 minuter?
- Ett varv är 600 meter. Hur många varv har Laila sprungit när hon har sprungit 5400 m?

Alice tog först reda på hur många minuter ett varv tar att springa och dubblade sedan de två varven för att slutligen ta reda på tiden för fem varv. Hon använde sig av tabellen även för att lösa del b och c.

En lärdom som lärarna tog med sig var att "våga stanna kvar" och diskutera lösningar och strategier. Lärarna insåg vikten av att ge eleverna tid att utveckla sina tankar snarare än alltför snabbt tala om hur de borde tänka. En annan lärdom var att låta eleverna diskutera och lösa problemet med egna ord. En av lärarna berättade att när eleverna behöver hjälp att ta sig fram, då sa hon till sig själv: "Inte lotsa ongarna!".



meter	min	varv
600	4	1
1200	8	2
2400	16	4
3000	20	5
4200	28	7
5400	36	9

Avslutande reflektioner

Jag blev positivt överraskad över kvaliteten på de lektioner som lärarna hade genomfört och på de reflektioner och lärdomar som de lyfte under vår sista träff med tanke på hur få träffar vi hade haft i kursen. Det framgick tydligt att lärarna hade tagit utgångspunkt i de begrepp som vi diskuterade i starten: problemlösning som medel, kognitiva utmaningar och proportionalitet. Alla försökte skapa uppgifter där det fanns något som var nytt för eleverna och tänkte på att inte ge eleverna för många ledtrådar, varken inför att de startade med uppgiften eller under tiden. Det blev viktigt för lärarna att eleverna tänkte själva och resonerade. De lät även eleverna redovisa såväl korrekta som felaktiga lösningar och lyssnade på elevernas olika strategier. Om enbart korrekta lösningar lyfts fram finns det en risk att de elever som inte riktigt förstod uppgiften inte blir delaktiga i diskussionen och förblir oengagerade. Om begreppsliga misstag lyfts fram kan klassen tillsammans försöka förstå det och komma fram till hur man kan göra i stället.

Lärarna hade fokus på det matematiska kring proportionalitet, att se mönster och samband mellan multiplikation och division. Det är inte självklart att till exempel dubbelt och hälften lärs ut som ett multiplikativt samband på lågstadiet. Aktiviteter om dubbelt handlar då snarare om addition, att man tar lika många till, till exempel $4 + 4 = 8$, vilket inte leder till ett proportionellt tänkande.

En sak som slog mig var att det fanns en tydlig progression i uppgifterna mellan årskurserna trots att lärarna enbart hade planerat inom sin årskurs. Alla hade dessutom tagit inspiration från en och samma text när de planerade sina lektioner, den om T-tabeller. Trots det blev den matematiska svårighetsnivån olika. Det är viktigt att eleverna får allt större utmaningar efterhand som de går vidare genom årskurserna.

En anledning till att lärarna utmanade sig själva och eleverna berodde förmodligen på att de själva verkligen ville lära sig mer. Det var inte någon uppifrån som bestämde att de skulle gå denna kurs utan innehållet skapades utifrån lärarnas behov och önskemål. Därför kunde en kort och intensiv kurs med föreläsningar, workshop, läsning och uppgifter mellan träffarna ge utdelning.

Samma dag som lärarna hade reflekterat och redovisat sina lektioner frågade de om jag kunde ordna ytterligare en kurs för dem. Vi hade ett nytt möte och beslutade att innehållet för den kursen skulle bli problemlösning som mål. I skrivande stund pågår den kursen.

LITTERATUR

- Helenius, O., Ahl, L. M. & Kilhamn, C. (2021). *Skalningsmodell för multiplikation*. Modultext, grundskolan åk 4–6, del 6, Lärportalen, Skolverket.
- Kilhamn, C. (2021). *Arbeta med skalningsmodellen*. Modultext, grundskolan åk 4–6, del 6, Lärportalen, Skolverket.
- Kilhamn, C. (2022). *T-tabeller som verktyg för proportionella resonemang*. Nämnaren, 2022:4.
- Landtblom, K. & De Ron, A. (2015). *Gruppera mera!* Nämnaren, 2015:4.
- Smith, M.S. & Stein, M.K. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik: för att planera och leda rika matematiska diskussioner: med handledning för fortbildning*. Natur & kultur.

Jonas Hall