Klas Lunderup

Matematiska tricks med digital rot

Ett roligt sätt att väcka intresse för matematik är att introducera ett tricks som vid första anblicken verkar som trolleri men som sedan visar sig bygga på ett logiskt resonemang utifrån talens inneboende struktur. Här är ett par sådana tricks.

Matematiska tricks som baseras på digital rot är förvånansvärt mångsidiga och kan fascinera både nybörjare och mer erfarna. Tricksen bjuder på en blandning av underhållning och lärande, där åskådarna kan njuta av överraskningseffekterna eller, för gymnasieelever, anta utmaningen att förstå matematiken bakom. Tricksen bygger på enkla principer och det enda som krävs är att deltagarna kan utföra enkel aritmetik för hand eller på räknaren.

Vad är digital rot?

Den digitala roten av ett tal erhålles genom sifferreduktion, det vill säga siffersumman, iterativt beräknad tills endast en siffra återstår. Till exempel har talet 258 den digitala roten 6, vilket beräknas, $2+5+8=15$ och därefter $1+5=6$.

Den digitala roten kan även beskrivas som resten vid division med 9, alltså det ensiffriga tal som ger kongruens modulo 9. Talet 258 har den digitala roten 6 och heltalsdivisionen 258/9 ger också resten 6. Om division med 9 ger resten 0 är dock den digitala roten 9.

Presentation av två roliga tricks

Jag ska börja med att presentera två tricks med digital rot som kan lyfta en matematiklektion och skapa intresse och engagemang hos eleverna. Utmana eleverna med frågor om varför det fungerar. Kan de *förklara* varför det fungerar? Kan de *bevisa* att det alltid fungerar?

Grundprincipen är att skapa ett tal som är delbart med nio. Ett tal är delbart med nio om och endast om dess digitala rot är nio. Denna egenskap kan användas på olika sätt för att skapa överraskande och till synes magiska tricks. Idén är att börja med ett heltal med minst tre siffror och genom olika räkneoperationer skapa ett nytt tal som är delbart med nio. Tricket fungerar även med tvåsiffriga tal, men fler siffror gör det mer spännande. Två metoder för att uppnå detta är:

1. subtrahera siffersumman
2. subtrahera en permutation av siffrorna.

Båda dessa metoder ger alltid ett tal delbart med nio. På nästa sida beskrivs två exempel på tricks och utifrån dessa kan fler varianter sättas ihop.

Exempel 1: Addera ett ensiffrigt tal > 0

Deltagarna gör följande:

- skriver ner ett godtyckligt heltal med minst tre siffror, till exempel 572
- beräknar siffersumman, $5+7+2=14$
- subtraherar siffersumman, $572-14=558$
- väljer ett ensiffrigt tal >0, till exempel 4, som adderas, $558+4=562$
- presenterar talet för dig.

Du beräknar $5+6+2=13$, $1+3=4$ och berättar att talet 4 adderades.

Exempel 2: Lägg till en siffra (1–9)

Deltagarna gör följande:

- Skriver ner var sitt godtyckligt heltal med minst tre siffror, där den första och sista siffran inte får vara lika, till exempel 4221.
- Skriver ner ett nytt tal som erhålls genom att låta första och sista siffran byta plats, 1224.
- Beräknar differensen mellan det större och det mindre talet, $4221-1224=2997$.
- Utökar talet med en siffra ($\neq 0$). Den kan läggas till i början av talet, mitt i talet eller i slutet av talet. Om talet utökas med siffran 3 kan det nya talet bli till exempel 29397 eller 29973.
- Presenterar talet för dig.

Du beräknar $2+9+3+9+7=30$, $3+0=3$ och berättar att talet utökades med siffran 3.

Varianter

Det första steget i Exempel 2 kan varieras på flera sätt. Två valfria olika siffror i talet kan byta plats, den första siffran kan sättas sist, siffrorna kan skrivas i omvänd ordning och så vidare. Siffrorna kan faktiskt ordnas på valfritt sätt. Alla permutationer fungerar, förutsatt att talet som väljs inte har alla siffror lika. Det andra steget kan också varieras. I stället för att lägga till en siffra kan en siffra i talet strykas. Skillnaden blir att differensen mellan 9 och den digitala roten måste beräknas. Observera att den digitala roten blir 9 både när 0 och 9 stryks. Man kan göra inskränkningen att 0 inte får strykas.

Bevis

Hur hänger då allt detta ihop? Jag använder talet 322 som exempel.

Heltalsdivisionen $\frac{322}{9}=\frac{3\cdot 100+2\cdot 10+2\cdot 1}{9}=3\cdot\frac{10^2}{9}+2\cdot\frac{10^1}{9}+2\cdot\frac{10^0}{9}$
vilket ger resten $3+2+2=7$ eftersom $\frac{10^k}{9}$ där $k\geq 0$ alltid ger resten 1.

Ett sätt att uttrycka detta är att säga att talet 322 är kongruent med 7 modulo 9, vilket skrivs $322\equiv 7 \pmod 9$. Siffersumman i talet 322 är precis $3+2+2=7$. Ett heltal, vilket som helst, är kongruent med sin siffersumma modulo 9. Om talet är delbart med 9 är också siffersumman delbar med 9 och vice versa. Ett tal är delbart med 9 om och endast om dess siffersumma är delbar med 9. Om siffersumman är delbar med 9 är också siffersummans siffersumma delbar med 9 och så vidare. Den digitala roten är 9.

Visa att om siffersumman av ett tal subtraheras erhålls ett tal med den digitala roten 9.

$$322-(3+2+2)=3\cdot 10^2-3+2\cdot 10^1-2+2\cdot 10^0-2=$$
$$=3\,(10^2-1)+2\,(10^1-1)+2\,(10^0-1)$$

Eftersom $10^k-1\equiv 0 \pmod 9$ då $k\geq 0$ är varje term delbar med 9 och resonemanget är klart.

Allmänt kan detta skrivas på följande vis

Låt $N=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 10^1+a_1\cdot 10^0$ vara ett godtyckligt heltal.

Låt $S(N)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1$ vara talets siffersumma.

Visa att $N-S(N)$ är ett tal med den digitala roten 9 då $n\geq 2$.

$N-S(N)=(a_n\cdot 10^{n-1}-a_n)+(a_{n-1}\cdot 10^{n-2}-a_{n-1})+\ldots+(a_2\cdot 10^1-a_2)+(a_1\cdot 10^0-a_1)$.

Faktorisera varje term.

$N-S(N)=a_n\,(10^{n-1}-1)+a_{n-1}\,(10^{n-2}-1)+\ldots+(a_2\,(10^1-1)+a_1\,(10^0-1)$.

Eftersom $10^k-1\equiv 0 \pmod 9$ då $k\geq 0$ är varje term delbar med 9.

$N-S(N)\equiv 0 \pmod 9$.

Differensen är delbar med 9 och den digitala roten av differensen är 9.

Beviset är klart.

På motsvarande sätt kan det visas att differensen mellan ett tal och en godtycklig permutation av dess siffror alltid har den digitala roten 9.

Låt $N=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 10^1+a_1\cdot 10^0$ vara ett godtyckligt heltal.

Låt $P(N)=b_n\cdot 10^{n-1}+b_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+b_2\cdot 10^1+b_1\cdot 10^0$ vara ett tal där siffrorna utgör en godtycklig permutation av siffrorna i talet N.

Visa att $N-P(N)$ är ett tal med den digitala roten 9 då $n\geq 2$.

$10^k-1\equiv 0 \pmod 9$ då $k\geq 0$.

$N\equiv a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1 \pmod 9$.

$P(N)\equiv b_n+b_{n-1}+\ldots+b_2+b_1 \pmod 9$.

Eftersom $P(N)$ endast är en omkastning av siffrorna i N gäller likheten

$a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1=\ b_n+b_{n-1}+\ldots+b_2+b_1$.

$N-P(N)\equiv(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1)-(b_n+b_{n-1}+\ldots+b_2+b_1)=0 \pmod 9$.

Differensen är delbar med 9 och den digitala roten av differensen är 9.

Beviset är klart.

Genom små justeringar kan tricksen anpassas till olika nivåer och publik, vilket gör dem lika användbara i klassrummet som på en fest. Kanske blir nästa variant något som du själv sätter ihop?