Linda Marie Ahl

Algebramåndag

Genom att ihärdigt en dag i veckan ge elever algebrauppgifter som diskuteras noga får de många erfarenheter som gör att de litar både på matematikens regler och den egna förmågan att resonera om korrekta lösningar.

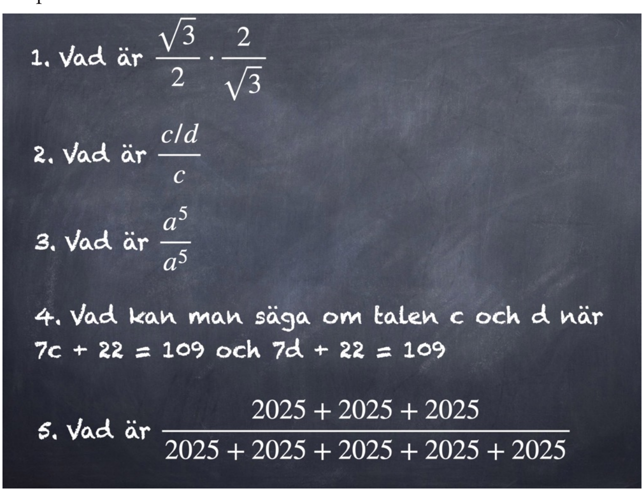
Jag anser att det är viktigt att eleverna litar på matematiken. De behöver vara säkra på att vissa regler alltid gäller. För att bygga upp den här säkerheten använder jag modellen Algebramåndag som jag utvecklade när jag undervisade i Kriminalvårdens vuxenutbildning. Den har fungerat bra och jag har fått positiv respons både från eleverna och i deras resultat på nationella prov. Idén är enkel: resonera om enskilda exempel för att identifiera det allmänna fallet.

Först några definitioner: *Aritmetik:* Beräkningar med tal.
Algebra: Resonemang om tal.

Följande dialog är en sammanfattning av mina erfarenheter från olika skolsammanhang. Via aritmetiken identifierar läraren tillsammans med gymnasieeleverna generella egenskaper hos tal, till exempel insikten att multiplikation av ett udda tal med ett jämnt tal alltid ger en jämn produkt.

Fem uppgifter

När eleverna kommer in i klassrummet på måndagen finns det fem uppgifter att lösa på tavlan.



En typisk tavla på måndag morgon när eleverna kommer in i klassrummet.

Sociomatematiska normer

I alla matematikklassrum finns det gemensamma överenskommelser för vad som kallas sociomatematiska normer. Dessa normer skiljer sig från allmänna klassrumsnormer genom att de är specifika för de matematiska aspekterna av elevernas deltagande, aktivitet och arbete i klassrummet. Kort och gott normer för *när* och *hur* man ska göra *vad* och *hur*, när man deltar i matematikundervisning. För Algebramåndag gäller följande:

1. Arbetet börjar direkt utan en inledande genomgång. Eleverna börjar arbeta med uppgifterna direkt efter principen att de startar med den uppgift som de tror är lättast för dem att lösa.
2. Alla beräkningar som görs ska förklaras med matematiska lagar och konventioner.
3. Eleverna ska övertyga läraren och sina klasskamrater om att beräkningarna är rätt.

Sociala normer

Lärarens uppgift är inte att svara på frågan: Är det här rätt? Istället ska läraren bekräfta att resonemangen är rätt. Är resonemangen rätt så är naturligtvis svaret rätt så det kan tyckas vara en hårfin skillnad mellan att bekräfta resonemang istället för att bekräfta att svaret är rätt men i själva verket är det en ganska stor förskjutning i förhållningssätt både för läraren och eleverna. De flesta lärare är vana vid att bekräfta att svaret är rätt. De flesta elever är vana vid att läraren eller bokens facit bekräftar att de har rätt svar. Men om eleverna ska bygga självförtroende till sina beräkningar när varken läraren eller facit finns tillgängliga så behöver de lära sig att sätta ord på och lita på sina resonemang.

Ingen handuppräckning i klassrummet. Läraren kan fråga vilken elev som helst. Om eleven inte har någon idé, eller en halvfärdig idé, om hur uppgiften ska lösas får de fråga någon klasskompis om hjälp. Kompisen förklarar för eleven som fick frågan och eleven som först fick frågan återberättar för läraren vad kompisen sa till henne. Syftet med den här tekniken är att inkludera alla, såväl svaga som starka elever, och att aktivera språket i matematikinlärningen.

Jag är helt emot handuppräckning av flera skäl. Förutom att det ser fånigt ut så vet eleverna att läraren inte kommer att be dig att svara om du inte räcker upp handen. De som inte räcker upp handen kan i lugn och ro zooma ut och tänka på något annat. Att skippa handuppräckning håller eleverna på tårna eftersom de när som helst kan få en fråga. Genom att aktivera eleverna som resurser för varandra kommer alla elever att kunna svara på frågan med hjälp av sina klasskompisar och läraren riskerar inte att försätta någon elev i en jobbig situation där de blir svarslösa. En annan anledning till att jag inte gillar handuppräckning är att bland de elever som räcker upp handen, med hopp om att få visa vad de kan, kommer alla utom en att bli besvikna.

Att etablera nya klassrumsnormer är enligt min erfarenhet ganska lätt. Eleverna är experter på att gå i skolan så om man bara är tydlig och konsekvent med vad som gäller från och med nu så kommer de snabbt att snappa upp de nya normerna. Med det sagt går vi tillbaka till matematikarbetet.

Genomförande av lektionen

Låt eleverna arbeta med uppgifterna i 10–15 minuter, enskilt eller i par. Bryt sen arbetet och välj en elev och fråga om hen har löst någon uppgift. Vad som händer sen beror helt på hur arbetet har gått och hur länge elever har arbetat med algebramåndag.

I följande dialog beskriver jag ett fiktivt scenario baserat på mina egna erfarenheter, för att ge en känsla för hur det kan gå till.

Läraren: Har du löst någon av uppgifterna? [Frågar en elev.]

Elev: Ja, 3:an.

Läraren: Kom fram och skriv [på tavlan].

Eleven går fram och skriver = 1 vid uppgift 3.

Läraren: Hur vet du det?

Eleven: Jo, alltså samma delat på samma blir alltid 1. x^5 får plats en gång i x^5.

Läraren: Vad säger ni andra? Verkar det rimligt?

Läraren vänder sig till eleverna och frågar några om de tror på att ”samma delat på samma” alltid är ett. Alla tillfrågade instämmer.

Läraren: Gäller det även om vi har ett långt uttryck delat på samma långa uttryck? [Vänder sig till eleven vid tavlan.] Som till exempel, skriv på tavlan, $3 \cdot (x^4) + 3{,}75 - 3\,\%$ delat på $3 \cdot (x^4) + 3{,}75 - 3\,\%$.

Eleven skriver $\dfrac{3 \cdot (x^4) + 3{,}75 - 3\,\%}{3 \cdot (x^4) + 3{,}75 - 3\,\%}$ men ser tveksam ut.

Läraren: Ok, vad säger du? Är det också 1? Om du är osäker får du fråga någon kompis.

Eleven vänder sig till en annan elev.

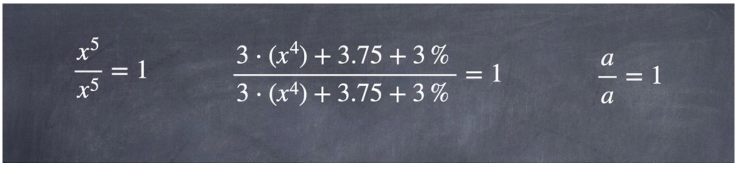
Eleven: Det borde väl vara så även om det ser konstigt ut med 3 % … [frågar en annan elev].

Elev 2: Ja, det är ett. Det kan se ut hur som helst bara det är lika uppe och nere [syftar på täljaren och nämnaren].

Eleven vänder sig till läraren.

Eleven: Ok, det är också 1.

Läraren: Tack! Det här kan man formulera i en generell regel. Skriv längst bort till höger på tavlan a delat på $a = 1$. a kan alltså vara ett ynka tal eller en hel harang. Det enda som spelar roll är att lika delat på lika alltid är 1 (och att a inte är 0).



Läraren: Ok, vi går vidare. [Vänder sig till en annan elev.] Har du löst uppgift 1?

Elev: Nej, jag har ingen aning. Jag kommer inte ihåg vad den där bocken vid trean är.

[Här gör läraren en utvikning och förklarar att roten ur är inversen till att kvadrera, att man lika gärna kan skriva upphöjt i ⅓ eftersom ⅓ är den multiplikativa inversen till 3, exemplifierar med några kvadrater att roten ur arean är sidan och att rotfunktionen är positiv per definition eftersom det inte finns några negativa längder på sidor och kvadrater.]

Läraren: Men det spelar egentligen ingen roll för vi behöver inte veta vad roten ur 3 är för att lösa det här. Jag ska ge er en ledtråd. Två bråk som ska multipliceras får man skriva på ett långt bråkstreck så här … det får man göra, ni får tro mig på mitt ord.

Läraren ber en elev komma fram och skriva uttrycket på ett långt bråkstreck.

Läraren: [Till klassen] Ok, hur var det nu igen, får man byta plats på faktorerna, alltså grejerna man gångrar ihop, när man multiplicerar?

[Läraren använder medvetet ett vardagligt språk samtidigt med ett korrekt ämnesspråk för att skola eleverna i korrekt ämnesspråk utan att tappa de som inte hänger med på faktorer.]

Klassen: Ja.

Läraren: Jag hörde inte. Vad sa ni?

Klassen: [Lite fler och högre] JA!

Läraren: Och vad heter den matematiska lagen som ni lärde er i 2:an? [Vänder sig till en elev.]

Eleven vet inte så hen frågar en annan elev och säger sen kommutativa lagen.

Läraren: Ja, det heter den. Alla, säg efter mig: Kommutativa lagen.

Läraren vänder sig till eleven vid tavlan.

Läraren: Använd den kommutativa lagen och byt plats på faktorerna uppe eller nere, välj själv.

Eleven byter i täljaren.

Eleven: Jag ser ju att det är samma uppe och nere så det måste ju bli ett.

Läraren: Precis, perfekt, det är $\frac{a}{a}$ igen. Pekar på rutan med $\frac{a}{a}$. Hade vi kunnat motivera svaret på något annat sätt?

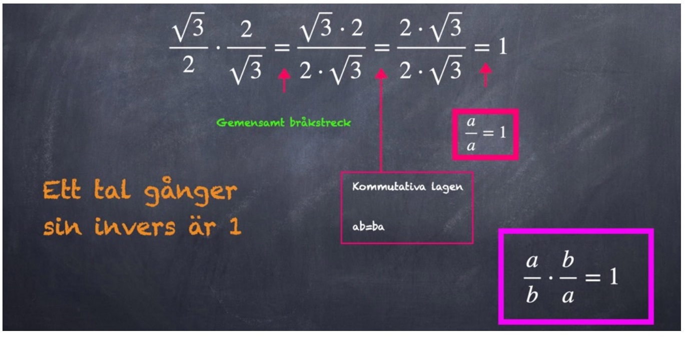
Elev 3: Ja, ett tal gånger sin invers är alltid 1.

Läraren: Ja, men hur förklarar man det?

Elev 3: Som vi gjorde nu funkar ju.

Läraren: Ja, om vi tror på det här kan vi i fortsättningen skippa det gemensamma bråkstrecket och direkt tillämpa att ett tal multiplicerat med sin invers är 1.

Vänder sig till eleven vid tavlan. Skriv $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ där borta under $\frac{a}{a} = 1$.



Läraren: Vi går vidare. Hur är det med talen c och d i uppgift 4. Vad kan vi säga om dem? [Vänder sig till en elev.]

Eleven: De måste vara lika eftersom allt annat är lika annars gäller inte likheten.

Läraren: Tack. Är alla med på det?

Elev 4: Egentligen är det ju konstigt att c kan vara d men vi pratade ju om det här förra veckan så man får väl bara acceptera det.

Läraren: Ja, jag förstår hur du tänker, tror jag. Om man skulle byta ut alla c mot d i en roman så skulle det inte funka så bra. Men här ska ska du tänka att c och d är platshållare för uttryck. Du skulle kunna rita en blomma eller en get på en alptopp. Det är helt ok men det tar ju lite tid. Det viktiga är att vi håller platsen för uttrycket.

Läraren: Ok, uppgift 5. Inga miniräknare. Vad gör vi? [Helt tyst i klassen] Läraren ber en elev komma fram. [Nu har det gått ganska lång tid på lektionen så läraren tar över initiativet för att även hinna med den mer intressanta uppgiften 2.]

Läraren: Så vad blir det, tror du?

Eleven: Ingen aning. Jag behöver en räknare för det här.

Läraren: Nej, det behöver du inte. Hur många 2025 har du i täljaren?

Eleven: 3

Läraren: Och hur många 2025 finns det i nämnaren?

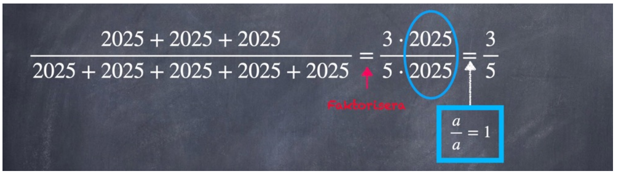
Eleven: 5

Läraren: Och hur kan man skriva 3 stycken 2025 som multiplikation?

Eleven skriver $\frac{3 \cdot 2025}{5 \cdot 2025}$ på tavlan och drar sen streck över båda 2025 och skriver 1 ovanför.

Eleven: Eftersom $\frac{a}{a}$ är 1 så är $\frac{2025}{2025} = 1$ och vi får kvar $\frac{3}{5}$.

Läraren: Tack utmärkt! Vänder sig till klassen. Ler och säger att det är ju lite smidigare att räkna 2025:orna än att addera täljare och nämnare och försöka dividera de stora talen. Det här kallas faktorisering. Det ska vi prata mer om en annan dag.



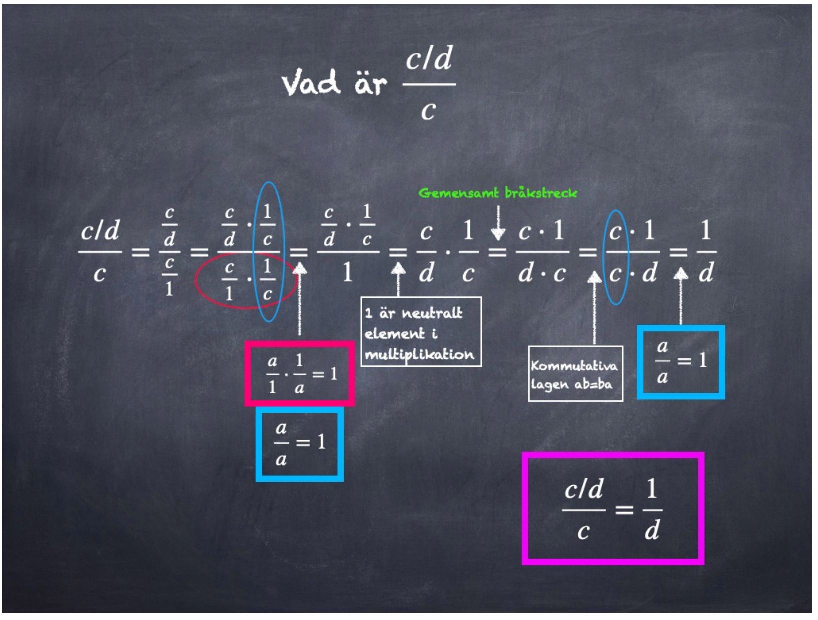
Läraren: Nu har vi bara uppgift 2 kvar. Nu ska vi använda allt vi jobbat med idag, plus att vi ska använda den viktiga principen att 1 är det neutrala elementet i multiplikation och division, det vill säga att inget händer om man multiplicerar eller dividerar med 1. Om vi tittar på tavlan [pekar på $\frac{a}{a}$] så ser vi att vi kan skriva en etta i bråkform precis hur vi vill så länge det är ett uttryck delat på samma uttryck. Om vi tittar här [pekar på $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$] så ser vi att vi också kan skriva en etta som vilket uttryck som helst multiplicerat med sin invers. Hela tal får också vara med. Kom ihåg att alla hela tal kan skrivas i bråkform med den neutrala ettan i nämnaren, till exempel $3 = \frac{3}{1}$.

Läraren: Jag gör det här idag. Skriv ner precis det jag gör och motiveringarna. Ni har i läxa till nästa måndag att någon gång under veckan gå igenom den här uppgiften. Det gör inget om ni tycker det verkar krångligt och inte hänger med riktigt. Vi kommer att återkomma till allt som vi gjort idag många, många gånger så ni kommer vänja er.

Ok, först skriver jag om nämnaren till $\frac{c}{1}$, ettan är det neutrala elementet i multiplikation så det får jag göra. Jag skriver allt med raka bråkstreck för jag tycker det är lättare att jobba med än sneda bråkstreck. Säkert bara gammal vana, men …

Problemet med det här uttrycket är att jag inte vet vad jag ska göra med nämnaren. Jag vill bli av med den. Vill man bli av med något så kan man göra det till en neutral etta. Vi använder invers [pekar på $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$] och samma delat på samma [pekar på $\frac{a}{a}=1$]. Vi får multiplicera hela uttrycket med 1. Vi skriver ettan så att det gynnar våra syften – att bli av med den jobbiga nämnaren.

[Skriver och pekar på det blå $\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}}$.]



Läraren frågar en elev, hur väljer jag $\frac{1}{c}$?

Eleven pratar med andra elever.

Elev 6: Det är nämnarens invers så den [nämnaren] blir neutral, alltså 1. Sen bygger man en gånger-etta genom att ta nämnarens invers där uppe också. Så har man bara multiplicerat allt med 1.

Läraren: Visst, fiffigt va? Man kan eliminera vilken nämnare som helst med den här tekniken. Ja, så nämnaren blir 1 [skriver och pekar] så den behöver vi inte bry oss om. Nu gör vi samma grej som i uppgift 1. Vi skriver på långt bråkstreck och byter plats på faktorerna uppe eller nere. Läraren frågar en elev som flackar med blicken.

Läraren: Ska vi byta plats uppe eller nere? Välj!

Elev 7: Ehhh, uppe.

Läraren: Ok, då gör jag det och vad heter den lag som motiverar att byta plats på faktorerna. Börjar på K. Svara allihopa rakt ut.

Eleverna: Kommutativa lagen.

Läraren: En gång till alla, högre [det behövs lite mer energi i klassrummet].

Eleverna: KOMMUTATIVA LAGEN!

Läraren: Fint, och nu ser vi att vi har en *a* över *a*-situation bara att det råkar vara *c* över *c*. Och vad blir det?

Eleverna: ETT!

Läraren: Och kvar finns bara $\frac{1}{d}$.

Jag ska ställa en fråga. Tänk efter tyst nu allihopa och vänta tills jag frågar igen. Det som har hänt här är att täljaren och uttrycket i nämnaren har kvitterats ut till en etta. Det finns inga *c* kvar. Bara $\frac{1}{d}$. Frågan är: Blir det alltid såhär för alla uttryck som kan skrivas på formen $\frac{c/d}{c}$? [Tyst en stund.] Ok, när jag frågar så säger ni rakt ut ja eller nej. Blir det alltid så?

Eleverna: JA. [Även elever som egentligen inte hänger med kommer att svara ja för de läser av att läraren är nöjd med att de landar i en generell insikt i slutet av lektionen.]

Läraren: Tack, ni är bäst! Det kan man skriva med *a* och *b* [skriver och pekar] eller vilka bokstäver man vill.

Tack för idag!

Pågående implementering

Algebramåndag implementeras nu i 'vanlig skola' i fyra svenska kommuner. Under våren har pilotlärare som undervisar från förskoleklass till gymnasiet fått material och handledning av mig och Ola Helenius. En lektion i veckan viks åt Algebramåndag. Övriga dagar bedrivs undervisningen som vanligt. Målet är att lärarna ska bli bekväma med materialet så att de kan anpassa det efter sin undervisning och sina elever. Vi vill att lärarna ska göra materialet till 'sitt eget' så att de får tillräcklig med erfarenhet för att handleda sina kollegor. Projektet möjliggörs av medel från Skolforskningsinstitutet.