

Flest till 100!

Alla tal som inte är primtal kan primtalsfaktoriseras. Här får olika sorters tal bilda lag och tävla till 100, men inte *först* till 100, utan *flest* till 100. Primtalen bildar ett lag. Kommer primtalen att vinna över andra grupper av tal? Fram till 10 har primtalslaget hela fyra tal: 2, 3, 5 och 7.

Att känna till och kunna hantera primtal och primtalsfaktorisering är en fundamental aspekt av god taluppfattning. Här beskriver jag en aktivitet där elever får bli bekanta och bekväma med primtal genom att syssla med dem och se hur de fungerar. I synnerhet handlar den om att tal kan faktoriseras – och när man kommit fram till enbart primtal är det stopp. Aktiviteten ger en handfast upplevelse av vad primtal är.

I detta något udda upplägg är det själva talen som tävlar mot varandra. Eftersom det är svårt att veta resultatet i förväg kan det bli intressant för elever att själva utforska primtal och konstruera resultatlistorna. Antingen kan alla elever jobba tillsammans med att undersöka varje tal, eller så delas eleverna in i grupper där varje grupp får en sorts tal att hitta.

Lagindelning

- Lag 1: Primtal.
- Lag 2: Kvadrater på primtal, där de två första är $4 = 2^2$ och $9 = 3^2$.
- Lag 3: Kuber på primtal, där de två första är $8 = 2^3$ och $27 = 3^3$.
- Lag 1-1: Produkter av två olika primtal. $6 = 2 \cdot 3$ är det första talet i lag 1-1 och hit hör även $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$ och $15 = 3 \cdot 5$.
- Lag 2-1: En kvadrat på ett primtal multiplicerat ett annat primtal. Talet $12 = 2^2 \cdot 3$ är det första talet i lag 2-1.
- Lag 3-1: En kub på ett primtal multiplicerat med ett annat primtal. Talet $24 = 2^3 \cdot 3$ är det första talet i lag 3-1.
- Lag 1-1-1: Produkter av tre olika primtal, där det första är $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Det finns många fler lag. Alltså, Lag n - m består av n faktorer av ett primtal, och m faktorer av ett annat primtal. Lag n - m - k består av tre olika primtal, vars antal är n , m och k , och så vidare.

Detta betyder att varje positivt heltal som är minst 2 tillhör *exakt ett* lag. Det beror på att det finns endast ett sätt att faktorisera ett positivt heltal i primtal. Detta är aritmetikens fundamentalsats, som bevisades nästan helt av Euklides. Beviset gjordes komplett i början av 1300-talet av den persiske matematikern Kamal al-Din al-Farisi.

Låt oss titta på det bit för bit! Man kan tänka sig att Lag 1, de enkla primtalen, skulle ha stort självförtroende att vinna racet upp till 100, men låt oss se.

2=2
 3=3
 4=2²
 5=5
 6=3·2
 7=7
 8=2³
 9=3²
 10=2·5
 11=11
 12=2²·3
 13=13
 14=7·2
 15=5·3
 16=2⁴
 17=17
 18=2·3²
 19=19
 20=5·2²
 21=7·3
 22=11·2
 23=23
 24=2³·3
 25=5²
 26=13·2
 27=3³
 28=7·2²
 29=29
 30=2·3·5
 31=31
 32=2⁵
 33=11·3
 34=17·2
 35=7·5
 36=3²·2²
 37=37
 38=19·2
 39=13·3
 40=2³·5
 41=41
 42=7·3·2
 43=43
 44=11·2²
 45=5·3²
 46=23·2
 47=47
 48=3·2⁴
 49=7²
 50=5²·2²

Hur många är talen i de olika lagen?
 Vilket lag har flest tal upp till 20? Upp till 40? Upp till ...
 Är det samma lag som vinner?

Startskottet går!

På startsträckan, 2 till 20, rycker Lag 1 ganska väntat åt sig en klar ledning, med hela åtta primtal fram till 20. Mer än vart tredje tal här är primtal! Talen i Lag 1-1 dyker upp klumpvis, med 6 men även som 10, 14, 15, tätt följda av Lag 2-1 med både 12=2²·3, 18=2·3² och 20=5·2².

2 ≤ n ≤ 40	
1. Lag 1	12
2. Lag 1-1	12
3. Lag 2-1	4
4. Lag 2	3
5. Lag 3	2
6. Lag 3-1	2
7. Lag 4	1
8. Lag 1-1-1	1
9. Lag 5	1
10. Lag 2-2	1

2 ≤ n ≤ 60	
1. Lag 1	17
2. Lag 1-1	17
3. Lag 2-1	7
4. Lag 3-1	4
5. Lag 2	4
6. Lag 3	2
7. Lag 1-1-1	2
8. Lag 2-2	2
9. Lag 4	1
10. Lag 5	1
11. Lag 4-1	1
12. Lag 2-1-1	1

2 ≤ n ≤ 20	
1. Lag 1	8
2. lag 1-1	4
3. Lag 2-1	3
4. Lag 2	2
5. Lag 3	1
6. Lag 4	1

...från 21 till 40...

På nästa avsnitt, 21 till 40, mattas Lag 1 av lite med bara fyra primtal, medan Lag 1-1 har hela åtta stycken! Lag 1 och Lag 1-1 delar nu ledningen. Lite oväntat, eller hur? Lag 2-1 hänger inte med i detta ryck.

...från 41 till 60...

Mellan 41 och 50 är det tre tal i Lag 1 och bara ett i Lag 1-1, ändå är det fortfarande lika mellan de båda lagen när vi är framme vid 60. Lag 1-1 har bara fem på detta avsnitt men åtta på det förra när laget spurtade ikapp Lag 1. Vad kan det bero på? Kanske för att produkter av större primtal är för stora för gränsen 60? Lag 2-1 och Lag 3-1 är fortfarande två ifrån varandra, kanske Lag 3-1 kan hänga på här? Talen 30 och 42 ser till att Lag 1-1-1 nu har två poäng.

$$2 \leq n \leq 80$$

1. Lag 1	22
2. Lag 1-1	22
3. Lag 2-1	12
4. Lag 3-1	4
5. Lag 2	4
6. Lag 1-1-1	4
7. Lag 3	2
8. Lag 2-2	2
9. Lag 4-1	2
10. Lag 4	1
11. Lag 5	1
12. Lag 2-1-1	1
13. Lag 6	1
14. Lag 3-2	1

... från 61 till 80 ...

När vi kommit upp till 80 är det otroligt nog fortfarande lika mellan Lag 1 och Lag 1-1! De har båda ökat med fem, lika mycket som i förra perioden, samtidigt som nya lag dyker upp, såsom att $72 = 3^2 \cdot 2^3$, vilket ger Lag 3-2 sitt första tal. Mellan 61 och 80 finns det fem stycken i Lag 2-1 men inte ett enda i Lag 3-1! Talen ligger verkligen ojämnt.

$$2 \leq n \leq 100$$

1. Lag 1-1	29
2. Lag 1	26
3. Lag 2-1	15
4. Lag 3-1	5
5. Lag 2	4
6. Lag 1-1-1	4
7. Lag 2-1-1	4
8. Lag 2-2	3
9. Lag 3	2
10. Lag 4-1	2
11. Lag 4	2
12. Lag 5	1
13. Lag 6	1
14. Lag 3-2	1

$51 = 17 \cdot 3$
$52 = 13 \cdot 2^2$
$53 = 53$
$54 = 3^3 \cdot 2$
$55 = 11 \cdot 5$
$56 = 7 \cdot 2^3$
$57 = 19 \cdot 3$
$58 = 29 \cdot 2$
$59 = 59$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$61 = 61$
$62 = 31 \cdot 2$
$63 = 7 \cdot 3^2$
$64 = 2^6$
$65 = 13 \cdot 5$
$66 = 11 \cdot 3 \cdot 2$
$67 = 67$
$68 = 17 \cdot 2^2$
$69 = 23 \cdot 3$
$70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$
$71 = 71$
$72 = 3^2 \cdot 2^3$
$73 = 73$
$74 = 37 \cdot 2$
$75 = 5^2 \cdot 3$
$76 = 19 \cdot 2^2$
$77 = 11 \cdot 7$
$78 = 7^2 \cdot 2$
$79 = 79$
$80 = 5 \cdot 2^4$
$81 = 3^4$
$82 = 41 \cdot 2$
$83 = 83$
$84 = 7^3 \cdot 2^2$
$85 = 17 \cdot 5$
$86 = 43 \cdot 2$
$87 = 29 \cdot 3$
$88 = 11 \cdot 2^3$
$89 = 89$
$90 = 5 \cdot 3^2 \cdot 2$
$91 = 91$
$92 = 23 \cdot 2^2$
$93 = 31 \cdot 3$
$94 = 47 \cdot 2$
$95 = 19 \cdot 5$
$96 = 7 \cdot 3^2 \cdot 2$
$97 = 97$
$98 = 7^2 \cdot 2$
$99 = 11 \cdot 3^2$
$100 = 5^2 \cdot 2^2$

... upploppet till 100

På sista sträckan, fram till 100, avgörs tävlingen. Lag 1-1 rycker ifrån och vinner klart, med tre poäng före Lag 1. Primtalen är *inte* flest till 100 – produkter av två olika primtal är det!

Även här är det fyra primtal, men nu sju stycken i Lag 1-1. Tre av dem är till och med intill varandra: $85 = 17 \cdot 5$, $86 = 43 \cdot 2$ och $87 = 29 \cdot 3$. Lag 2-1 är inte så långt efter med tre nya tal. Man kan undra hur det skulle gått om loppet var längre ...

Om loppet var till oändligheten

Säg att x är ett positivt tal. Hur många primtal finns det som är mindre än x ? I fallet att x är mycket stort bevisades 1896 att det antalet är nära $x/\ln x$ och att felet blir mindre ju större x är, vilket kallas asymptotiskt. Detta påstående kallas *primtalssatsen*, som formulerades av Gauss men bevisades av Hadamard och de la Vallè Poussin oberoende av varandra.

Om $x = 100$, som i vårt fall, får vi $(\ln 100)/100 \approx 21,7$ som inte är särskilt nära det sanna värdet 26. Men 100 är inte ett mycket stort tal och vi har sett att primtalen kommer ganska ojämnt. Mellan 31 och 40 var det ju bara två primtal ...

Semiprimtal

Talen i Lag 1-1 kallas ibland semiprimtal. Det är även känt hur många de är upp till ett tal x , asymptotiskt. Antalet är $x \cdot \ln(\ln x)/\ln x$, så något fler än $x/\ln x$. Det är dock inte någon stor skillnad, för $\ln(\ln x)$ växer oerhört långsamt.

101 = 101
 102 = 51 · 2
 103 = 103
 104 = 13 · 2³
 105 = 3 · 5 · 7
 106 = 53 · 2
 107 = 107
 108 = 3³ · 2²
 109 = 109
 110 = 11 · 5 · 2
 111 = 37 · 3
 112 = 2⁴ · 7
 113 = 113
 114 = 19 · 3 · 2
 115 = 23 · 5
 116 = 2² · 29
 117 = 3² · 13
 118 = 59 · 2
 119 = 17 · 7
 120 = 2³ · 3 · 5
 121 = 11²
 122 = 61 · 2
 123 = 41 · 3
 124 = 2³ · 31
 125 = 5³
 126 = 2 · 3² · 7
 127 = 127
 128 = 2⁷
 129 = 43 · 3
 130 = 13 · 5 · 2
 131 = 131
 132 = 2² · 11 · 3
 133 = 19 · 7
 134 = 67 · 2
 135 = 3³ · 5
 136 = 2³ · 17
 137 = 137
 138 = 23 · 3 · 2
 139 = 139
 140 = 2² · 5 · 7
 141 = 47 · 3
 144 = 2⁴ · 3²
 145 = 29 · 5
 146 = 73 · 2
 147 = 7² · 3
 148 = 2² · 37
 149 = 149
 150 = 5² · 3 · 2

Vi kan som exempel ta hur rubrikens 100! kan uppfattas som "100 fakultet", det vill säga $1 \cdot 2 \dots 99 \cdot 100$, som är ett heltal med 157 siffror – ett tal långt större än antalet atomer i universum. Men $\ln(\ln 100!)$ är bara 5,9. Det betyder att om vi gör detta lopp mot oändligheten vinner Lag 1-1 även då mot Lag 1, inte bara upp till 100. Lag 1 ledde som vi kan se hela vägen upp till 38.

Lag 1-1 med flera

Det finns även resultat för Lag 1-1-1. Här är antalet tal mindre än x lika med $x(\ln(\ln x))^2/(2 \ln x)$, så även Lag 1-1-1 kommer att passera Lag 1-1! Men 2:an i nämnaren gör att det blir mycket sent. Det ska sägas att detta inte är en särskilt bra uppskattningar på så sätt att det är bara när x är extremt stort som dessa termer dominerar och andra onämnda termer blir försvinnande små i jämförelse. Lag 2 har asymptotiskt $2\sqrt{x}/\ln x$ tal mindre än x , som växer betydligt långsammare än $x/\ln x$.

För Lag 2-1, eller Lag 2-2, har jag inte hittat några kända resultat. Jag har inte lyckats bevisa något själv heller. Ännu.

För Lag 1-1-1-1, vars första tal är $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, gäller $x(\ln(\ln x))^3/(6 \ln x)$. Även de kommer att passera tidigare nämnda lag, men långt, långt senare.

Variationer på lagtävlingen

Talens lagtävling kan varieras på flera olika sätt.

Antal faktorer

Man kan slå ihop Lag 1-1 och Lag 2 som båda har två primfaktorer, och Lag 2-1, Lag 3 och Lag 1-1-1 som alla har tre primfaktorer. Det ger en tabell med antal faktorer som talen upp till 100 har. Det visar sig att vart tredje tal har två primfaktorer, vart fjärde är primtal, och lite färre har tre faktorer.

Antal faktorer	
Två	33
En	26
Tre	21
Fyra	15
Fem	4
Sex	1

Lagets första tal	
Lag 1	2
Lag 2	4
Lag 1-1	6
Lag 3	8
Lag 2-1	12
Lag 4	16
Lag 3-1	24
Lag 1-1-1	30
Lag 5	32
Lag 2-2	36
Lag 4-1	48
Lag 2-1-1	60
Lag 6	64
Lag 3-2	72

Lagets första tal

En annan variant är att se hur snart första talet dyker upp för de olika primtalsgrupperna. Den listan ser ganska annorlunda ut än listan för $2 \leq n \leq 100$. När flera olika primtal är involverade dyker talet upp senare för att produkten blir större, men därefter blir det flera kombinationsmöjligheter, så sådana tal blir så småningom fler.

