Arbeta vidare med Cadet

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Håller resonemanget? Ni kan diskutera vad i problemet som är nödvändigt att veta innan man löser problemet. Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Diskutera även svarsalternativen. Många elever klarar sig kanske utan dem, men att diskutera andras lösningar är bra för att eleverna ska vänja sig vid att ge och ta konstruktiv kritik. Om de redan under de tidigare åren i grundskolan får uppleva att andras lösningar och felsvar är en naturlig del av lärandet kan det bli en fruktbar form av arbete med matematik framöver.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar?
- Hur vet vi att svaret är rätt?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå igenom lösningsstrategier noga, fokusera på nödvändiga begrepp. Hämta in snarlika problem från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem från olika år finns att hämta på Känguruns webbsida på ncm.gu.se/kanguru, med förslag på hur känguruproblem kan vara utgångspunkt för vidare arbete. En del av dem passar bäst i högstadiet medan andra kanske är mer lämpliga för gymnasiet. Se dessa som förslag som du kan utveckla och anpassa till just din klass.

Nedan har vi samlat några av problemen från Cadet 2026. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

Spatialt tänkande

Spatialt tänkande återkommer i flera av problemen i årets Cadet (3, 7, 10, 15). Det handlar om förmågan att kunna uppfatta och bearbeta visuella och rumsliga samband, till exempel att:

- urskilja mönster och strukturer
- föreställa sig förändringar som rotationer och förflyttningar
- tolka och använda grafer och geometriska figurer
- växla mellan visuella representationer och matematiska symboler

I takt med att elever blir äldre ökar kraven på denna förmåga. Samtidigt tenderar undervisningen att i högre grad ta för givet att elever redan behärskar spatialt tänkande, snarare än att fortsätta utveckla det systematiskt. Vikten av spatialt tänkande har lyfts fram inom STEM-ämnena [1][2], och forskning visar att det inte är medfött utan kan tränas [2], samt att det har starka kopplingar till elevers matematikutveckling [4].

För att ge elever en stabil matematisk grund behöver undervisningen aktivt stödja utvecklingen av spatialt tänkande. Det kan till exempel innebära att:

- Synliggöra det visuella i matematiken
  Arbeta med bilder, skisser och modeller – inte som illustrationer, utan som en del av problemlösningen.
- Låta elever växla mellan representationer
  Ge uppgifter där elever kopplar bild, graf, ord och algebraiska uttryck. Använd exempelvis aktiviteten Tanketavlan.
- Arbeta med transformationer och rörelse
  Undersök hur objekt förändras genom förflyttning, rotation och spegling.
- Använda laborativa och digitala verktyg
  Till exempel GeoGebra eller konkreta modeller som gör matematiken synlig.
- Uppmuntra resonemang kring bilder
  Låt elever beskriva, jämföra och argumentera för olika visuella strategier.
- Inte ta förmågan för given
  Undervisa explicit i spatialt tänkande – precis som i algebra.

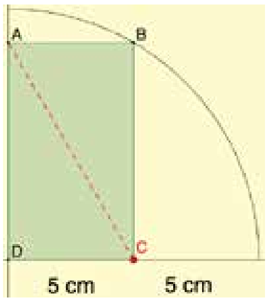
Då det kan behövas många olika situationer och problem ger vi här många exempel på problem som innehåller spatialt tänkande från Cadet under gångna år.

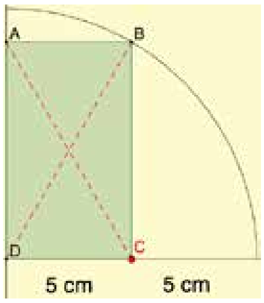
Liknande problem: Cadet 2025:2 & 9, 2024:14 & 17, 2023:5 & 12, 2022:3, 4, 5 & 11, 2021:7, 8 &14, 2020:16 & 18, 2019:2, 3 & 20, 2018: 5, 2017:5, 2016:14, 15& 21, 2014: 6&22, 2013: 8&9, 2012:2,7, 16&23, 2011: 14, 2010: 2, 6 &19.

Area

Flera av problemen (1, 17 och 19) är areaproblem. De bygger på välkända figurer, men det som gör dem utmanande är hur figurerna är sammansatta. Här behöver elever analysera, dela upp, omforma och se samband snarare än att bara använda formler.

Forskning lyfter vikten av att bryta ner geometriska figurer genom visualisering för att identifiera egenskaper [5], samt hur digitala verktyg kan stödja detta arbete [6] [7]. För elever som aldrig sett exempel på sådant kan det bli en utmärkt övning att tillsammans bryta ner en figur i delfigurer, punkter och sträckor etc. Att lägga till hjälplinjer, t.ex. att rita in en diagonal som inte redan finns med, är ofta avgörande för att synliggöra strukturer [7].





Exempel: Om uppgiften är att beräkna sträckan AC i rektangeln som är inskriven i kvarts-cirkeln så kan det bli helt avgörande för eleven att hjälplinjen DB ritas in för att inse att AC är lika lång som radien.

Undervisningen kan med fördel fokusera på att:

- förstå figuren innan beräkning: Vad består den av? Vad kan omformas?
- synliggöra relationer mellan storheter
- arbeta med proportionalitet och beroenden
- uttrycka okända längder med hjälp av kända

Lyft och jämför olika lösningsstrategier i helklass:

- Var används proportionalitet?
- Vilka storheter hänger ihop?
- Vilka längder är egentligen samma?
- Hur kan vi uttrycka det okända?

Liknande problem: Liknande uppgifter till uppg 1 i årets Cadet finns i Cadet 2025:4, 2002:4, 2021:2, 2020:4, 2019:8,

Liknande problem: Andra areaproblem finns bland annat i Cadet 2025:8&22, 2024: 3&12, 2021:14&18, 2020:14, 2019:17, 2018: 3,16,21,22.

Vinklar

Vinkelproblem återkommer i årets Cadet (13 och 21). Uppgifterna kräver ofta att elever identifierar "rätt" startpunkt, upptäcker dolda trianglar och ibland konstruerar hjälplinjer.

Ett viktigt första steg i undervisningen är att låta elever:

- markera lika vinklar
- skriva ut kända vinklar i figuren
- arbeta i par med att "läsa av" figuren innan de löser problemet

För att stärka kvaliteten i helklassdiskussioner kan Stein m.fl.:s fem praktiker [8] fungera som ett konkret stöd:

Praktikerna innebär att du som lärare bör:

1. Förutse: Fundera i förväg på vilka strategier elever kan använda
2. Monitorera: Lyssna aktivt efter olika lösningsidéer när elever arbetar, försök identifiera sådan strategier och idéer som du redan förutsett,
3. Välja ut: Lyft fram lösningar som synliggör viktiga matematiska idéer
4. Ordna: Presentera lösningarna i en genomtänkt ordning
5. Koppla: Hjälp elever att se samband mellan olika strategier

Målet är att det ska bli diskussion snarare än en redovisning – helklassdiskussionen blir en viktig del i gemensam kunskapsutveckling.

Arbeta också aktivt med missuppfattningar, till exempel:

- att "allt som ser rakt ut är 180°"
- att elever blandar ihop vinkeltyper
- att regler används utan att deras giltighet prövas

Fördjupa resonemangen genom frågor som:

- Vad händer om vinkeln ändras?
- Gäller detta alltid?
- Hur kan vi vara säkra?

Här ges naturliga ingångar till bevisföring och generalisering.

Liknande problem: Cadet 2025: 2&18, 2024:10&23, 2023:14, 2022:23, 2021:12, 2020:1&18, 2019:12.

Tals egenskaper

Känguruproblem inom tal och delbarhet (t.ex. 2, 5, 6, 14, 16, 24) ger rika möjligheter att utveckla elevers taluppfattning. Uppgifterna är ofta undersökande och uppmuntrar elever att pröva, resonera och upptäcka mönster.

En central del i detta arbete är att synliggöra strategier. Här är Polya [9] särskilt relevant, där två strategier är återkommande i dessa problem:

- Guess and check (pröva och ompröva)
- Make an orderly list or table (systematiskt prövande)

Det är viktigt att inte se detta som "gissning", utan som en strukturerad metod. Läraren kan stödja detta genom att:

- modellera hur man organiserar sina försök
- använda tabeller eller listor för att skapa överblick
- visa hur systematik leder till generalisering

Exempel på frågor att ställa:

- Hur kan vi vara säkra på att vi testat alla fall?
- Hur kan vi organisera våra resultat så att vi ser mönster?
- Vad förändras – och vad är konstant?

Undervisningen kan också fokusera på att:

- undersöka delbarhet och formulera egna regler
- koppla siffersummor till positionssystemet
- resonera kring hur tal är uppbyggda
- formulera och pröva hypoteser

Ett viktigt mål är att gå från procedur till förståelse, till exempel genom att förklara varför delbarhetsregler fungerar.

Avslutningsvis kan arbetet fungera som en bro till algebra, där elever uttrycker generella samband med symboler.

Här listar vi några Cadetproblem från tidigare år från olika taluppfattningsområden.

Liknande problem: Positionssystemet: 2025: 1,7&16; 2024:6; 2023:10; 2022:1&9; 2021:4,8&21, 2020:24; 2019:7&10.

Liknande problem: Delbarhet: 2020:19, 2014:21; 2013:4; 2011:19; 2010:18.

Liknande problem: Primtal: 2025:14, 2012:12

Liknande problem: Jämn/udda: 2022:8; 2019:1, 2017:23; 2012:12; 2009:1; 2007:18

Referenser

1. Khine, M. S. (2017). Spatial Cognition: Key to STEM Success. In M. S. Khine (Ed.), Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice (pp. 3-8). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0_1
2. Stieff, M., & Uttal, D. (2015). How Much Can Spatial Training Improve STEM Achievement? Educational Psychology Review, 27(4), 607-615. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9304-8
3. Cheng, Y.-L., & Mix, K. S. (2014). Spatial Training Improves Children's Mathematics Ability. Journal of Cognition and Development, 15(1), 2-11. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.725186
4. Bruce, C. D., Davis, B., Sinclair, N., McGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whiteley, W., & Woolcott, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using "spatial reasoning" as a window into the importance of networked educational research. Educational Studies in Mathematics, 95(2), 143-161. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9743-2
5. Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Morelos, Mexiko, 23-26 October 1999.
6. Markkanen, P. (2014). Tekniken utan en lärare är ingenting - En studie om användande av teknik i geometriundervisning. (Avhandling). Hämtad från http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-37683
7. Markkanen, P. (2021). Representationer, visualisering och resonemang i geometri: Praktiknära studier i digitala lärmiljöer (Doctoral dissertation, Örebro University).
8. Mary Kay Stein, Randi A. Engle , Margaret S. Smith & Elizabeth K. Hughes (2008) Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell, Mathematical Thinking and Learning, 10:4, 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675
9. Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton university press.