



---

## Arbeta vidare med BENJAMIN

---

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, [ncm.gu.se/kanguru](http://ncm.gu.se/kanguru)

Nedan har vi samlat några av problemen från BENJAMIN 2026. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

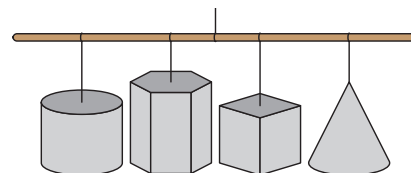


# Geometri

## 1 Geometriska kroppar

Problemet handlar om att byta perspektiv och att kunna föreställa sig hur en tredimensionell kropp ser ut från ett annat håll. Har eleverna svårt för den här uppgiften kan det vara bra att ta fram riktiga kroppar och undersöka dem konkret.

En bra fortsättning på den här uppgiften är att sätta namn på kropparna och på de tvådimensionella figurerna som utgör basytan. Samtala om vad som definierar kroppen och basytan och hur olika variationer av samma kropp eller figur kan se ut. I det här fallet används:



- \* En cylinder med cirkel som basyta = en rak cirkulär *cylinder*.
- \* Ett prisma med en hexagon som basyta. Definitionen av ett *prisma* är att det är en *cylinder*, vars basyta är en månghörning.
- \* En kub med en kvadrat som basyta. En *kub* är också ett *prisma* enligt definitionen ovan och därmed också en *cylinder*.
- \* En kon med cirkulär basyta = en rak cirkulär *kon*.

Ta fram fler kroppar och samtala om likheter och skillnader. Gör en begreppskarta över de olika kropparna och markera hur de hänger ihop med varandra.

Lästips:

*Tredimensionella figurer* av Niklas Larsson i *Nämnamnaren* 2020:4, sid 55–59.

[https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2021/12/5559\\_20\\_4.pdf](https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2021/12/5559_20_4.pdf)

*Begreppskartor, ett verktyg för bättre förståelse* av Andreas Andersson i *Nämnamnaren* 2002:2, sid 44–47. [https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/07/4447\\_02\\_2.pdf](https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/07/4447_02_2.pdf)

## 2 Upprepande mönster

Här handlar problemet om upprepande mönster. Sådana går att variera i det oändliga, både konkret, med bilder och med tal. Relatera till ställen i elevernas miljö där upprepande mönster förekommer, exempelvis i tapeter. I årets tävling finns ett *liknande problem* i Ecolier problem 8. Det är lättare för att en större del av golvet syns i bilden men samtidigt lite svårare för att mönsterrapporten inte är regelbundet förskjutet.

Här är ett förslag på hur man kan arbeta praktiskt med ett upprepande mönster:

Låt varje elev göra en mönster-del som kan upprepas.

Låt eleven kopiera sin mönsterrapport i flera upplagor och lägga dem på något sätt.

Enklast är att lägga dem i en lång rad.

Lite svårare är att lägga dem bredvid varandra med endast en liten regelbunden förskjutning (exempelvis en kakelplattas förskjutning som i detta problemet).

Ännu svårare är att lägga dem huller om buller, vända åt olika håll eller med större förskjutning, det vill säga utnyttja både rotation och förflyttning.

Låt eleverna byta mönster med varandra och titta på andras mönster för att försöka identifiera mönster-delen (den minsta delen som upprepas).



## 12 Parallelogram

Problem 12 handlar om en figur uppbyggd av parallelltrapetser, vilket i sig är en intressant form som man kan fördjupa sig lite extra i.

En parallelltrapets definieras så här: *en fyrhörning med minst två parallella sidor.*

Vad menas med parallella sidor?

Vad innebär det att minst två sidor är parallella? Är det en parallelltrapets om fler än två sidor är parallella? Kan tre sidor vara parallella i en fyrhörning?

Parallelogram, rektangel och kvadrat är namn på andra fyrhörningar. Hur ser de ut och hur många parallella sidor har de?

Försök att beskriva sambandet mellan de olika fyrhörningarna.

En kvadrat är ett specialfall av en rektangel där alla fyra sidor är lika långa.

En rektangel är ett specialfall av ett parallelogram där alla fyra vinklar är räta.

Ett parallelogram är ett specialfall av en parallelltrapets där sidorna är parvis parallella.

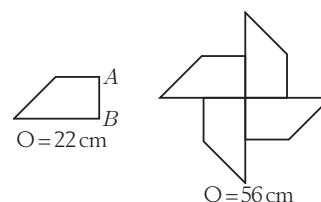
Den betyder att alla kvadrater är rektanglar men alla rektanglar är inte kvadrater.

Och så vidare ...

## 12 & 15 Omkrets och sidolängd

I både Problem 12 och 15 får vi veta en del om längden av olika sidor och ska använda den informationen för att beräkna andra sidor eller omkretsar.

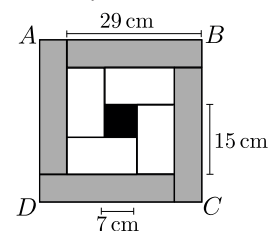
I facit till problem 12 föreslås att man beräknar summan av de fyra parallelltrapetsernas omkrets och subtraherar det från hela omkretsen, för att därefter se att sträckan AB som efterfrågas har räknats med 8 gånger för mycket, vilket innebär att skillnaden är åtta gånger den efterfrågade sträckan. Det finns givetvis flera olika sätt att resonera för att komma fram till svaret. Ett alternativ är som följer:



Börja med att dividera  $56/4 = 14$  som är de sträckor av varje parallelltrapets som är del av vindsnurrans omkrets. Vi ser då att från varje parallelltrapets har två av delsträckorna, båda av samma längd som AB, inte räknats med. Så skillnaden mellan hela parallelltrapetsens omkrets (22) och den del som också är del av vindsnurrans omkrets (14) utgör två gånger den sökta sträckan AB, så vi har  $22 - 14 = 2 \cdot AB$ . Därav följer att  $AB = 4$ .

I problem 15 gäller det att lista ut hur vissa sträckor kan uttryckas i relation till andra sträckor. Problemet kan utgöra ett bra tillfälle att införa variabler som ett sätt att beskriva sambanden.

Fråga eleverna vilka sidor som är lika långa i figuren och om de kan uttrycka hur långa de är. Man kan se att den vita rektangelns långsida måste vara summan av den svarta kvadratens sida plus lite till:  $15 = 7 + a$ . Därifrån kan man räkna ut  $a$  till 8 och även inse att det är längden på den vita rektangelns kortsida.



Fortsätt att resonera om de olika sidorna och markera tydligt vilka sidor som är lika långa.

*Liknande problem:* Benjamin 2024:16, 2023:15, 2021:13, 2012:1, Cadet 2020:13,



## Tal och tals användning

### 4 Tärningar

En vanlig tärning har sex sidor numrerade från 1 till 6 och där summan av talen på två motsatta sidor alltid är 7. Undersök en vanlig tärning och se om den är korrekt konstruerad. Undersök hur en tiosidig tärning är konstruerad. Finns det någon regel där? Det finns många roliga problem med tärningar. Här är två från Benjamin 2019:6 och Benjamin 2010:14.

På en vanlig tärning är summan av talen på motstående sidor alltid 7. Vilken bild visar en sådan tärning?

A B C D E

Tre vanliga tärningar har limmats ihop så som bilden visar. Vilken är summan av prickarna på de sidor som limmats ihop?

A: 12 B: 13 C: 14 D: 15 E: 16

På [ncm.gu.se](http://ncm.gu.se) finns fler aktiviteter och problem som utgår från tärningar. Många av dessa finns samlade i häftet *Tärningar – spel, aktiviteter, problem*.

### 5 Tallinjen

Tallinjen är en viktig matematisk modell över talen och deras inbördes ordning. Den kan också utvecklas till att vara en tankemodell för att lösa problem och utföra beräkningar.

En viktig aspekt av tallinjen är att avståndet mellan två konsekutiva tal (på varandra följande tal) alltid är lika långt. Vet man avståndet mellan exempelvis 0 och 1 eller mellan 0,5 och 0,6 eller mellan 10 och 20 så kan man därifrån avgöra alla andra tals placering. Arbeta mycket med tallinjen på olika sätt. Ett förslag är att rita eller tejpa upp en lång linje på golvet och ta med hela kroppen i uppgiften att placera ut olika tal på tallinjen. Diskutera vilken skala ni ska ha och var de olika talen hamnar. Skala om tallinjen och placera om talen så att de hamnar rätt i den nya skalan. Lästips: *Sagt & Gjort: Golvtallinje* av Caroline Nagy i *Nämnamnaren* 2026:1, sid 3–6.

Ursprungligen var det här problemet framtaget som reservproblem för Cadet. Då var det lite svårare och löd så här:

På tallinjen på bilden finns sex punkter utmärkta. Punkterna är jämnt utspridda med lika långt avstånd mellan varje punkt. Den första punkten finns vid talet 3 och den sjätte punkten finns vid talet 7. Vilket tal finns vid den tredje punkten?



Vad som gör den här uppgiften mycket svårare är att det är fem avstånd utmärkta mellan punkterna 3 och 7, Det innebär att avståndet mellan varje punkt är lite mindre än 1 men betydligt mer än  $1/2$ . Exakt hur mycket är det? Det måste vara  $4/5$  av enhetssträckan (den sträcka som har längden 1) mellan varje punkt eftersom  $5 \cdot (4/5) = 4$ . Tänker man hellre i decimaltal så är det 0,8 mellan varje punkt:  $4/5 = 8/10 = 0,8$ . Att laborera på detta vis med omskalning av tallinjen utvecklar förmågan att arbeta med bråk och decimaltal.

Andra uppgifter med tallinjen: Ecolier 2026:5, 2022:4, 2021:7, Benjamin 2013:8.



## 7 Bråk

Problemet handlar om bråk som del av antal och att kunna hantera olika helheter.

I första ledet av problemet består helheten av 8 bitar. I andra delen av problemet består helheten av det som är kvar, vilket är 6 bitar. Det är bra att följa upp den här uppgiften med att prata igenom lösningen i sådana termer. Gör också ett försök att beskriva lösningen med matematiska symboler:

Helheten är 8 bitar.

$1/4$  av 8 kan skrivas som  $1/4 \cdot 8 = 2$ . Då återstår 6 bitar.

$1/2$  av 6 kan skrivas som  $1/2 \cdot 6 = 3$ .

$6 - 3 = 3$ , alltså återstår 3 bitar av de ursprungliga 8.

*Andra problem som hanterar bråk:*

Storlek på bråk: Cadet 2026:5

Del av antal och likvärdiga bråk: Cadet 2025:4

# Klockan

## 9 Tidsberäkning

Uppgifter som har med tidsberäkningar att göra kan vara svåra dels för att man är osäker på klockan, dels för att klockan är uppbyggd i bas 60 och 12 och inte i bas 10, och dels för att tid i sig är ett svårt begrepp.

Använd en analog klocka när ni samtalar om uppgiften för att illustrera vad som händer vid skiftet mellan hela timmar: från 13:59 till 14:00.

Hitta själv på fler problem på samma tema. Något händer regelbundet med ett visst tidsintervall och frågan gäller när en sak en bit in i framtiden inträffar. Variera tidsintervallet så att beräkningarna blir lagom svåra, men se till att passera 12 så att utmaningen att räkna i bas 60 (minuter) eller bas 12 (timmar) blir en del av problemet. Extra utmanande är att passera midnatt. Här är ett exempel:

Doktorn ordinerade Irma att ta en tablett var 11:e timme. Hon tog sin första tablett klockan 13:00. Vad var klockan när hon tog sin 23:e tablett?

En riktig utmaning finns i årets tävling i klassen Cadet, problem 18. I den uppgiften finns två klockor där den ena går för fort och den andra för långsamt. Problemet kan vara en utgångspunkt för att prata om skillnaden mellan tid som passerat, hur tiden upplevs och vad som visas på en klocka. I problemet får man också fundera på vad det innebär att en klocka går för fort eller för långsamt.

För vidare arbete med klockan kan du ha nytta av kopieringsunderlag som finns under "matematikpapper" på <https://ncm.gu.se/matematikpapper>. Där finns tomma analoga och digitala urtavlor.



## Systematiskt arbete

### 13, 14 & 21

Ett gemensamt drag i dessa tre problem är att de är lätta att lösa om man går systematiskt tillväga. Om man kan hitta något sätt att representera varje steg i lösningsprocessen blir problemet överskådligt och möjligt att lösa. Prata med eleverna om hur de gick till väga och hjälps åt att representera tankeförloppet på ett systematiskt sätt.

13 Problem 13 kan kopplas till den genialiska idé som Karl Friedrich Gauss lär ha fått när han var 9 år gammal då han fick i uppgift att addera alla tal från 0 till 100. Han kom på att det gick bra att para ihop tal som bildade summan 101, exempelvis  $100 + 1$ ,  $99 + 2$ ,  $98 + 3$  osv. Han insåg snabbt att det skulle bli 50 sådana par och beräknade således  $50 \cdot 101 = 5050$ . Läs mer om detta i till exempel Kristin Dahls bok *Matte med mening*.

Problemet löses enkelt om man inser att det handlar om att nålen kommer att genomborra precis hälften av talen och att de kommer att vara jämnt utspridda. En del elever kommer att vilja ta det ett steg i taget. Börja då med att rita upp hur det ser ut efter första vikningen och fortsätt samtalen därifrån.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

14 Problem 14 har eleverna troligen angripit på olika sätt. Låt samtalen fokusera olika strategier snarare än svaret. Det är lite för mycket information att hålla i huvudet, så någon form av representation behövs. Kanske har någon bokfört systematiskt? Här kan fördelen med en tabell lyftas fram, men även en tabell kan göras på olika sätt. I tabell 1 ser man hur många varje person tar, men det är inte helt enkelt att se när Paul kommer upp till eller över 25. I tabell 2 har vi adderat Pauls antal successivt och ser därmed när vi är klara.

Charles	Paul	Simon
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	

Charles	1	4	7	10
Paul	2	$5+2=7$	$8+7=15$	$11+15=26$
Simon	3	6	9	

Utmana eleverna att göra en tabell i ett kalkylblad (excel) där både antalet som var och en tar och vars och ens kumulativa summa finns med!

21 Problem 21 handlar om att systematiskt testa olika kombinationer. Hur kan man vara säker på att man fått med alla möjliga kombinationer som uppfyller villkoren att innehålla fyra udda siffror och att de ska vara antingen i ökande eller minskande ordning? Vilken systematik hade olika elever i sitt testande? Någon kanske invänder att de inte är ett villkor att alla ska vara olika, vilket skulle betyda att även en kombination som 1135 skulle vara möjlig. Diskutera om talen i en sådan kombination kan sägas öka från vänster till höger.



## Logik

### 16 Villkor om äpplen

I problem 16 ges två helt olika villkor som båda måste användas för att lösa problemet. Det gäller att hitta ett tal som uppfyller båda villkoren. Hur har eleverna gjort? Kanske har någon gissat och testat sig fram? Vad är i så fall en rimlig gissning? Hur vet man det? I facit ger vi ett förslag på hur ett logiskt resonemang i flera steg kan se ut. Titta noga på hur resonemang leds framåt med hjälp av sambandsord. Prata om dessa språkliga termer och vilken funktion de har för att visa på logiken i resonemanget. Gör eleverna uppmärksam på när och hur dessa ord används.

Den första ledtråden ger att totala antal elever är  $80/4 = 20$ .

Om det är 8 färre elever så ska de övriga 12 få ytterligare 6 äpplen var.

$12 \cdot 6 = 72$ . Det innebär att de 8 eleverna har sammanlagt 72 äpplen och var och en av dem  $72/8 = 9$  äpplen. Eftersom det är 20 elever finns det  $20 \cdot 9 = 180$  äpplen i lådan.

Sammanställ gemensamt i klassen en lista på sambandsord som kan vara användbara i matematiska resonemang. Prata också om begreppet *villkor*.

till exempel jämfört med i likhet med i motsats till för att eftersom genom att på grund av om ... så då följer att det ger att innebär att

### 18 Sant eller falsk

I problem 18 ges ett antal påståenden. Ett villkor är att varje påstående innehåller både sann och falsk information. Här behöver man genomföra ett resonemang enligt mallen:

*Om X är sant så följer att ...*

*Eftersom Y är falskt innebär det att ...*

Be eleverna komma med förslag på resonemang i form av påståenden som dem föreslagna i rutan ovan. Skriv upp förslagen så att alla ser hur sambandsorden *om*, *så följer att*, *eftersom* och *innebär* används och resonera er fram till problemets lösning.

Matematiken har ett eget symbolspråk och de mest använda sambandsorden kan därför skrivas med särskilda tecken. Matematiker använder dem i sin bevisföring för att göra bevisen så korta och överskådliga som möjligt. Det kan vara intressant för eleverna att titta på dem, även om de inte ingår i skolmatematiken. Här är några av de vanliga:

$\Rightarrow$  implikationspil: "om ... så ...", "det medför att ...", sätts ut när ett påstående leder till ett annat, men inte nödvändigtvis åt andra hållet:  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ .

$\Leftrightarrow$  ekvivalenspil: "om och endast om" (skrivs ibland omm), "samma sak som", sätts mellan två påståenden som är sanna samtidigt, där det ena kan bytas ut mot det andra:  $x + 5 = y + 2 \Leftrightarrow x + 3 = y$

Den här sortens problem finns i många Kängurutävlingar.

*Liknande problem* hittar du exempelvis i: Benjamin 2023:18; 2021:21; 2020:16; 2018:11  
Årets Cadet, problem 23 är en riktig utmaning på temat sant och falskt!