

Och kamelerna blev också glada

Kamelproblemet är mer än en rolig gåta. Det är en dörr till oändliga serier, andelsfördelning, och inte minst, tanken att vi ibland behöver lägga till något för att rättvisa ska kunna skipas. När rättvisa skipas med mildhet och fantasi, så kanske till och med kamelerna blir glada.

Det var en gång en mulen dag. Jag stod och väntade på tåget i Växjö, på väg mot Karlskrona. En äldre pensionär började samtala med mig. När han fick veta att jag var mattelärare, önskade han få veta lösningen till det urgamla matematiska problemet:

Hur delas 17 kameler mellan tre personer enligt faderns testamenten så att de tre syskonen får $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ respektive $\frac{1}{9}$ av arvet?

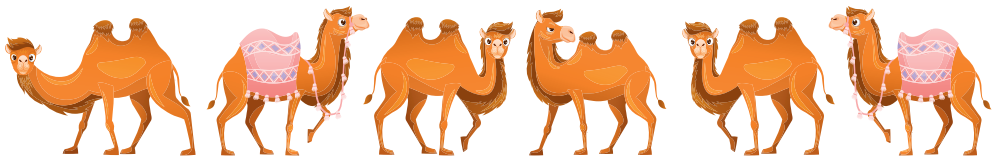
Jag svarade med den kända lösning som brukar följa på gåtan. Man lånar en kamel till så att syskonen nu har 18 kameler. Sedan får arvtagarna enligt testamentet 9, 6 och respektive 2 kameler, och den utlånade kamelen lämnas tillbaka till problemlösaren. Mannen log nöjt. Jag tror att han redan kände till lösningen.

På tåget började jag fundera över denna kända lösningsmetod. Kan den verkligen bevisas vara matematiskt korrekt? Jag lekte med tanken.

Antag att vi ska dela 17 kameler med testamentets andelar, behöver vi verkligen låna en kamel och sedan ge tillbaka den? Är detta en form av algebraisk substitution eller manipulation? Kanske ...

Men problemet handlar om andelar, det förstår vi redan vid första ögonkastet. Varför skulle vi inte lösa det, genom bolagsräkning (fördelningsräkning). Denna regel, liksom reguladetri och många andra räkningsmetoder, har galet nog försvunnit ur skolmatematiken trots att de är mycket användbara – både i praktiken och vid textuppgifter eller problemlösning. Jag tänkte helt enkelt: jag börjar med problemet och låter vägen visa hur jag ska gå.





Problemet och en lösning

17 kameler ska delas mellan tre personer enligt testamentets direktiv:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

Plötsligt ser jag att hela arvet som är $1 = \frac{18}{18}$ inte är fördelat!

$$\frac{18}{18} - \frac{17}{18} = \frac{1}{18} \text{ Alltså är } \frac{1}{18} \text{ kvar!}$$

Eftersom det bara finns dessa tre arvtagaren, bör vi fortsätta dela $\frac{1}{18}$ med samma andelar. Men vi håller oss till papper och penna – ingen kniv och inget blod!

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{18^2}$$

$$\frac{1}{18} - \frac{17}{18^2} = \frac{1}{18^2}$$

Efter en ny fördelning återstår nu $\frac{1}{18^2}$ av arvet. Fortsätter vi dela, blir det kvar en rest på $\frac{1}{18^3}$. Vi kan fortsätta hur långt som helst med denna fördelning och får hela tiden en rest på följande sätt: $\frac{1}{18}, \frac{1}{18^2}, \frac{1}{18^3}, \dots, \frac{1}{18^n}$

Vad har vi gjort hittills?

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot 1 = \frac{17}{18} \text{ rest } \frac{1}{18}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{18} = \frac{17}{18^2} \text{ rest } \frac{1}{18^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{18^2} = \frac{17}{18^3} \text{ rest } \frac{1}{18^3}$$

...

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{18^{n-1}} = \frac{17}{18^n} \text{ rest } \frac{1}{18^n}$$

Hela arvfördelningens process enligt testamentets direktiv är följande:

$$VL = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^2} + \dots \frac{1}{18^n}\right)$$





En geometrisk serie

En geometrisk serie har uppenbarat sig! Följande är en avtagande geometrisk talserie:

$$\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^2} + \dots \frac{1}{18^n} \right)$$

vars summa ges av:

$$\frac{\frac{1}{18}}{1 - \frac{1}{18}} = \frac{1}{18-1} = \frac{1}{17}, \text{ då } n \text{ går mot oändligheten!}$$

Vi ger ett exempel som inte kräver högre matematik: Välj en längd, med 1 längdenhet. Dela den i två. Då får vi två halvor. En behåller vi, den andra delar vi igen. Så fortsätter vi processen hur långt som helst. Vi får en summa:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$$

Även om antalet termer i denna addition är oändligt vet vi att summan är 1. Med miniräknaren ser vi att redan summan av de åtta första termerna är större än 0,99. Ju flera termer, desto närmare 1 kommer vi, det vill säga summan går mot 1 då antalet termer går mot oändlighet.

Antal termer är oändligt – men summan är 1! Ingen manipulation, inget trolleri! Detta är rolig och kraftfull matematik – tillgängligt för alla att lära sig. Åter till vår lösning där summan av den geometriska talserien är $\frac{1}{17}$.

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^2} + \dots \frac{1}{18^n} \right) \cdot 17 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{17} \right) \cdot 17 = 9$$

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^2} + \dots \frac{1}{18^n} \right) \cdot 17 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{17} \right) \cdot 17 = 6$$

$$\frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^2} + \dots \frac{1}{18^n} \right) \cdot 17 = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{17} \right) \cdot 17 = 2$$

*Vill ni låna mig en
stund? Dela mig bara
inte i mindre bitar!*



Generalisering

Beräkningen vi gjort gäller för alla multiplar av 17, alltså tal på formen $k \cdot 17$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{17}\right) \cdot 17k = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{17} \cdot 17k = 9k$$

$$P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{17} \cdot 17k = 6k$$

$$P_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{18}{17} \cdot 17k = 2k$$

Första gången jag presenterade den matematiska lösningen offentligt var flera år senare, vid Åbo Akademi i Vasa i Finland. I slutet av föreläsningen sammanfattade jag med orden "Alla tre arvtagare fick mer än de hade väntat sig. De blev nöjda – och glada!" Med matematikerns glädje i rösten svarade professor Ole Björkqvist snabbt: "Och kamelerna blev också glada – de slapp att slaktas!" När jag skickade min lösning till Anders Tengstrand, min tidigare examinator och mentor skickade han en generalisering av min lösning. Det var inte bara en matematisk fördjupning, utan även ett tecken på fortsatt förtroende och värme i vår kontakt.

En generalisering av kamelproblemet av Anders Tengstrand

Antag att ett kapital k skall fördelas mellan n arvtagare $A_1, A_2, \dots, A_n$ så att de får respektive $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ andelar. Antag vidare att:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha < 1$$

Arvtagare A_j får i steg 1: $\alpha_j \cdot k$, $j = 1, 2, \dots, n$. Då återstår: $k - \alpha \cdot k$ att fördela. Samma princip används och A_j får då: $\alpha_j \cdot k(1 - \alpha)$.

Efter steg 2 återstår

$$k(1 - \alpha) - \alpha \cdot k(1 - \alpha) = k(1 - \alpha)^2$$

och detta fördelas enligt samma princip. I steg m får A_j :

$$\alpha_j \cdot k(1 - \alpha)^{m-1}$$

Efter oändligt många steg får A_j sammanlagt:

$$\alpha_j \cdot k \left[1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + \dots \right] = \alpha_j \cdot k \cdot \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = \frac{k\alpha}{\alpha}$$

Om k är ett heltal och $\alpha = \frac{k}{k+1}$ så är A_j 's andel lika med $\alpha_j \cdot (k + 1)$.

