

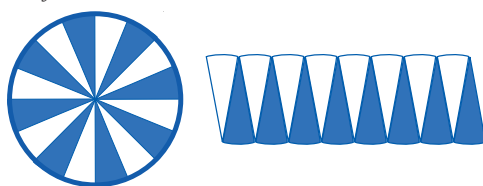
Klotets volym och area med hjälp av geometriska bevis

Elever kan med grundläggande matematik medverka i resonemang som härleder klotets volym och area. Med bilder och modeller går det att åskådliggöra de geometriska bevis som formulerades för ett par tusen år sedan.

I formelsamlingar kan man hitta formler för exempelvis cirkelns area, konens volym eller klotets volym och area. Bevis för formlerna redovisas sällan i läromedel, men går att göra på ett enkelt sätt med hjälp av geometriska bevis. Arkimedes (287–212 f Kr) är kanske mest känd för elever genom Arkimedes princip, men han definierade också metoder för arean av en parabel, area och volym av ett klot samt volymen av en ellipsoid. Arkimedes lär ha varit mycket produktiv, men dessvärre finns inte så många dokument kvar från hans tid. Matematikerna på Arkimedes tid uttryckte sig på den tidens språk med fler geometriska härledningar än algebraiska, jämfört med nu. Genom att utgå från dagens skolmatematik är det möjligt att göra härledningar med tydliga bilder och med metoder från grundskolan. Den här artikeln leder till en variant av Arkimedes metod att bevisa klotets area och volym.

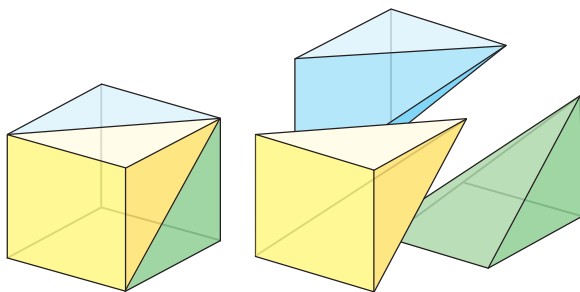
Cirkelns area

En cirkel har omkretsen $d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$. Detta gör att halva omkretsen är $\pi \cdot r$. Om vi studerar nedanstående bild, kan vi förstå varför cirkelns area är $\pi \cdot r^2$. Vi kan se att rektangelns bas är $\pi \cdot r$ och att rektangelns höjd är r . Vi får att basen gånger höjden är $\pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$.



Pyramidens volym

Om vi har en pyramid, som precis får plats inuti en kub, så är pyramidens volym $\frac{1}{3}$ av kubens volym. Flyttar vi pyramidens topp utan att höjden ändras, även utanför stödytan, behålls samma yta vid vilken höjd som helst om vi gör ett tvärsnitt parallellt med pyramidens basyta, se illustration på nästa sida. Därför gäller detta för alla pyramider. Volymen för en pyramid är alltså $\frac{\text{basytan} \cdot \text{höjden}}{3}$.



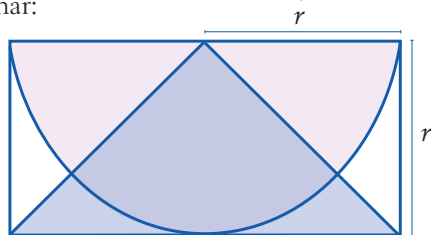
Har man en modell, kan modellen lyfta undervisningen. Det är fullt möjligt att tillverka en kub av tre pyramider enligt bilden ovan i exempelvis slöjdsalen.

Konens volym

Vi kan dela upp en kon i ett oändligt antal väldigt små pyramider. Därför gäller sambandet för pyramidens volym även för en kon. Volymen för en kon är $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ och volymen för en kon med höjden r är $\frac{1}{3}\pi r^3$.

Klotets volym

Antag att vi har en cylinder med radien r och höjden r . Inuti cylindern finns dels ett halvklot och dels en kon, som båda precis får plats. Det var Bengt Johansson, NCM:s förste föreståndare, som inspirerade mig till denna tanke. Han tyckte det skulle vara häftigt om man kunde gjuta halvklotet och konen inuti en cylinder med olika genomskinliga färger. Med dagens teknik är det troligen möjligt att skriva ut en sådan form i en 3D-skrivare. Konens volym är $\frac{1}{3}$ av cylinderns och halvklotets volym är $\frac{2}{3}$ av cylinderns volym. Från sidan ser det ut så här:



Vid ett horisontellt snitt vid vilken höjd som helst är konens tvärsnittsarea plus halvklotets tvärsnittsarea lika med cylinderns tvärsnittsarea. Cylinderns volym är πr^3 och konens volym är $\frac{1}{3}\pi r^3$. Halvklotets volym måste därför vara $\frac{2}{3}$ av cylinderns volym. Därför är halvklotets volym $\frac{2}{3}\pi r^3$ och ett helt klots volym blir då $\frac{4}{3}\pi r^3$.

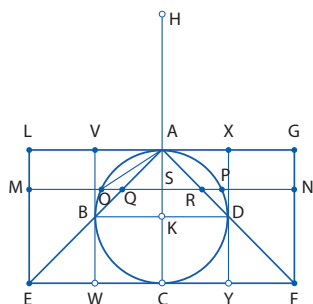
Man kan visa att det stämmer genom att räkna ut tvärsnittsarean vid höjden h för konen respektive cirkeln med Pythagoras sats och jämföra resultatet för cylinderns tvärsnittsarea:

Area för kon är πh^2 .

Tvärsnittsarea för halvklot är $\pi \sqrt{(r^2 - h^2)}^2 = \pi(r^2 - h^2)$.

Konens area plus halvklotets tvärsnittsarea är πr^2 vilket motsvarar cylinderns area. Detta kallas för Cavalieres princip och formulerades av Cavalieri 1635.

Arkimedes bevis byggde på samma idé, men klotets radie hade bara halva radien av cylinderns. Beviset som Arkimedes gjorde fungerade, men var alltså inte lika enkelt och tydligt, det behövde fler förklaringar efteråt. Möjligen kan Arkimedes bild vara enklare att konstruera med passare och linjal, alltså med de Euklidiska metoder som användes då. Det finns flera publikationer där Arkimedes metod för härledning av klotets volym är beskriven. Samtliga redovisar varianter av bilden till vänster.



Romaren Cicero skrev om Arkimedes gravsten. Där lär det ha funnits ett klot avbildat inuti en cylinder och proportionen $\frac{2}{3}$ inristad. Historikern Heiberg återupptäckte 1906 Arkimedes palimpsest i ett kloster i Istanbul. Det är en gammal text skriven på pergament, som dessutom hade skrapats bort och skrivits över med religiösa texter, men som ännu är delvis läsbar. Palimpsesten

har på senare tid studerats mer noggrant med moderna metoder. I avsnittet som kallas Metoden beskrev Arkimedes hur man beräknar klotets volym och area. Metoden återgavs på engelska 1912 av T. L. Heath.

Klotets area

Man kan dela upp ett klot i ett oändligt antal pyramider med höjden r som tessellerar, det vill säga täcker hela klotets yta. Pyramidernas volym är lika med klotets volym som är arean $\cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Detta betyder att klotets mantelarea är $4\pi r^2$. Beviset användes av Arkimedes och är sannolikt det vanligaste beviset för klotets mantelarea.

Grundskolans matematik

Det intressanta med dessa bevis är att de ligger inom ramen för grundskolans matematik. Numera när vi har tillgång till internet kan vi välja vad vi tycker är bäst. Om man söker med orden proof, pyramid och cube och letar efter bilder, kan man hitta fler bevis på pyramidens volym. Det finns fullt med fantastiska bilder och bevis, som kan vara inspirerande och värda att utforska. Har man väl fått fram bilder, kan elever göra geometriska figurer av papper, som bevisar formler som ingår i kursen. Det kan bli lustfyllda lektioner där elever är aktiva och lär sig mycket. En gång hade jag en naturklass med hemklassrum, där vi bland annat satte upp det grekiska alfabetet med förklaringar och hur man uttalade de olika konstanterna, till exempel pi eller omega. Vi var överens om att formelsamlingar är bra men bevisen bakom formlerna är mer intressant, så när en elev hade förstått eller gjort ett bevis, satte vi upp det på väggen. Efter tre år var klassrumsväggarna fulla med bevis som elever hade gjort och vi hade en levande diskussion om dem.

LITTERATUR OCH LÄNKAR

Heath, T. L. (1912). *The method of Archimedes*.

www.wilbourhall.org/pdfs/archimedes/archimedesHeiberg.pdf

Ny teknik nr 46 (2012). *Så beräknade Arkimedes klotets volym*.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Studentlitteratur.

Forskningsprojekt kring Arkimedes palimpsest:

www.archimedespalimpsest.org