

## Från förundran och utforskande till generalisering

När vi på NCM förberedde 2024 års adventskalender, frågade vi mest på skoj Pedram Hatami om han hade en lösning på problem 22. Till vår förvåning berättade han att hans arbetskamrat Ali Ludvigsen hade skrivit en hel artikel om just det problemet – på norska, och nu har vi översatt den.

**K**lockan, ett vardagsobjekt som vi tar för givet, har en fascinerande egenskap som ofta går obemärkt förbi – förhållandet mellan dess visare. När vi tittar på klockan för att kontrollera tiden tänker vi sällan på den matematiska utmaningen att beräkna detta förhållande. Jag vill ta dig med på en resa från förundran och utforskande till generalisering, och ge en inblick i hur elever kan närma sig och lösa klockproblem likt det i adventskalendern:

Klockan 03:00 står minutvisaren och timvisaren vinkelrätt mot varandra.

Efter hur lång tid står visarna återigen vinkelrätt?

Texten är i grunden inspirerad av en iransk trigonometrikursplan för gymnasieskolor på 80- och 90-talen. I en av uppgifterna stod det så här:

Hur stor är vinkeln mellan klockans visare när klockan är 2:30?

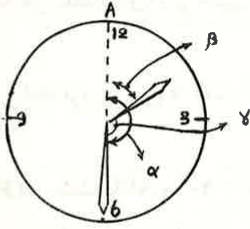
Själva uppgiften kan tyckas vara ett standard- eller klassiskt problem, men det som verkligen var magiskt var hur lösningen generaliserades. På den tiden skrevs många lösningar i Iran av personer som var skickliga i matematik och de sålde sina kompendier utan ISBN-nummer eller annan officiell identifiering. I slutet av en av dessa föreslagna lösningar, se illustration på nästa sida, presenterades en allmän formel för att beräkna vinkeln mellan visarna ( $\gamma$ ) när timmar ( $h$ ) och minuter ( $m$ ) angavs. Formeln är markerad med rött. Omslagsbilden på nästa sida visar boken som sidan är tagen ur. Den fann jag nu på senare tid här i Norge.

Översatt till vårt skrivsätt blir formeln följande:

$$\angle \gamma = |30h - 5,5m|$$

Märkligt nog gavs ingen förklaring till eller härledning av denna formel. På 90-talet, utan dagens tillgänglighet till internet, YouTube och liknande, tog det tid att härleda formeln på egen hand. Jag kommer här att härleda formeln genom att återge den utforskning som inspirerade mig att hitta lösningen.

۴) در ساعت ۲ و ۳۰ دقیقه عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار چه زاویه ای با یکدیگر میسازند ؟



راه حل : زاویه ای که عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ساعت با هم تشکیل میدهند ، عبارتست از تفاضل زاویه ای که عقربه دقیقه شمار در مدت ۳۰ طی میکند (α) و زاویه ای که عقربه ساعت شمار در مدت ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه طی می کند (β) یعنی

$$\gamma = \alpha - \beta \quad (1)$$

مقادیر دو زاویه را با استفاده از دو تناسب زیر بدست آورده و در رابطه (۱) قرار میدهم

$$\begin{aligned} 360^\circ & \text{ دقیقه } 1 \times 60 \\ x &= \frac{30 \times 360^\circ}{60} = 180^\circ \end{aligned}$$

زاویه ای که عقربه دقیقه شمار در مدت ۳۰ دقیقه طی میکند (مبداء کمانها نقطه A میباشد)

$$\begin{aligned} 360^\circ & \text{ دقیقه } 12 \times 60 \\ x &= \frac{150 \times 360^\circ}{12 \times 60} = 75^\circ \end{aligned}$$

توجه (۲ ساعت و ۳۰ دقیقه را به دقیقه تبدیل نموده ایم)  $105^\circ = 180^\circ - 75^\circ < \gamma$

توجه : خلاصه عملیات فوق را میتوان توسط فرمول زیر نمایش داد  $<\gamma = |30h - 5.5m|$

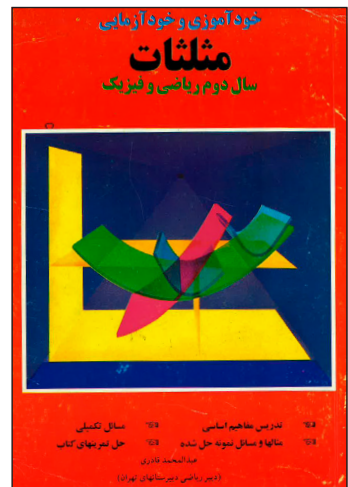
در فرمول فوق h مقدار زمان بر حسب ساعت و m مقدار دقیقه داده شده در صورت مسئله می باشد ، بعنوان تمرین مسئله قبل را با استفاده از فرمول فوق حل مینمائیم .

ساعت ۲ = h و دقیقه ۳۰ = m

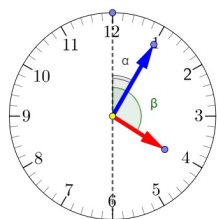
$$<\gamma = |30 \times 2 - 5.5 \times 30| \Rightarrow <\gamma = |60 - 165| \Rightarrow <\gamma = 105^\circ$$

För många elever kan uppgiften att beräkna förhållandet mellan visarna på en klocka verka som ett abstrakt och utmanande problem. Men genom noggrann observation och experimenterande kan de börja avslöja mönster och relationer som så småningom kommer att leda till utvecklingen av en allmän formel. Denna formel, som vi kommer att utforska mer i detalj, kan vi sedan använda för att programmera en dator.

Jag föreslår här en undervisningsgång där eleverna uppmuntras att utforska problemet med visarna på en klocka. Jag vill visa hur nyfikenhet och experimenterande kan leda till en grundlig förståelse av problemet och i slutändan till utveckling av en praktisk lösning. Kanske kan till och med någon elev göra detta med programmering och skapa ett Python-program. Så låt oss börja med att utforska detta fascinerande ämne och se hur förundran kan leda till insikt och användning av programmeringsförmågan.



## Förklaring av uppgiften och villkoren

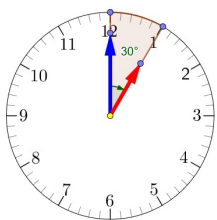


Vi tänker oss en vertikal, här streckad, linje från klockan 12 till klockan 6. Låt oss kalla den vinkel som minutvisaren skapar med den vertikala linjen för  $\alpha$ , och på motsvarande sätt vinkeln mellan timvisaren och den vertikala linjen för  $\beta$ .

Vi kallar vinkeln mellan visarna för  $\gamma$  och finner den som skillnaden mellan  $\beta$  och  $\alpha$ , det vill säga

$$\gamma = \beta - \alpha$$

### Timvisarens rörelse



Först kan vi notera att en klocka är indelad i 12 timmar.  $360^\circ$  dividerat med 12 timmar, ger  $30^\circ$  per timme. Med andra ord, timvisaren (röd i bilden) rör sig med en hastighet av  $30^\circ$  i timmen.

En timme är 60 minuter.  $30^\circ$  dividerat med 60 minuter medför att timvisaren rör sig  $0,5^\circ$  per minut.

Den totala rörelsen för timvisaren kan beskrivas i antal timmar multiplicerat med  $30^\circ$  plus rörelsen som sker i antal minuter multiplicerat med  $0,5^\circ$ :

$$\angle \beta = 30 \cdot h + 0,5 \cdot m, \text{ där } h \text{ är antalet timmar och } m \text{ är antalet minuter.}$$

### Minutvisarens rörelse

Eftersom minutvisaren (blå i bilden) rör sig med en hastighet av  $360^\circ$  uppdelat på 60 minuter motsvarar det  $6^\circ$  per minut,  $\angle \alpha = 6 \cdot m$ , där  $m$  är antalet minuter.

### Vinkeln mellan visarna

Vinkeln mellan visarna:

$$\angle \gamma = \angle \beta - \angle \alpha = 30 \cdot h + 0,5 \cdot m - 6 \cdot m$$

$$\angle \gamma = 30 \cdot h - 5,5 \cdot m$$



Förklaringen till varför vi väljer ett positivt numeriskt värde för vinkeln kan ses i figuren för klockan 6:50. Formeln ger:

$$\angle \gamma = 30 \cdot (6) - 5,5 \cdot (50) = -95$$

Vi vill ha den minsta vinkeln mellan visarna, därför beräknar vi bara det absoluta värdet av  $\gamma$ , det vill säga:

$$\angle \gamma = 30 \cdot h - 5,5 \cdot m \quad \rightarrow \quad \angle \gamma = |30 \cdot h - 5,5 \cdot m|$$

## Elevuppgifter

### Uppgift 1

Hur stor är vinkeln mellan visarna när klockan är 5:00?

### Uppgift 2

Hur stor är vinkeln mellan visarna när klockan är 5:10?

### Uppgift 3

Försök att generalisera till en formel.

### Uppgift 4

Använd formeln för att skapa ett program som beräknar vinkeln.