

Ett oändligt torn av exponenter

Här beskrivs en ekvation som det är lätt att fascineras av. Den innehåller inte bara en hel del matematiskt finlir utan också vackra mönster som ligger begravda i dess rötter. Vi tas ut på en resa som börjar i ett torn av exponenter och slutar i fascinerande fraktala mönster.

Ekvationen lyder så här:

$$x^{x^{x^{\cdots}}} = 2$$

Punkterna betyder att serien fortsätter i all oändlighet. På engelska talar man om "an infinite power tower series". På svenska skulle man kunna kalla det för en oändlig exponentserie. Det här är en ekvation som matematiker på olika sätt har intresserat sig för och brottats med sedan 1700-talet. Det är nästan svårt att ta in vad det betyder.

Vi börjar undersöka uttrycket genom att testa att sätta in $x=3$. Vi får då efter två steg, $3^3=27$. Vid nästa steg (iteration) får man 3^{27} som är lika med 7 625 597 484 987, alltså hela 7 600 miljarder (om man avrundar lite lätt). Notera att man beräknar exponenterna "uppifrån och nedåt". Ska man räkna ut 3^{3^3} tar man alltså först den senare delen, 3^3 , och får då 3^{27} , vilket är annorlunda mot om man tar den första delen först, alltså $(3^3)^3=27^3$.

Därefter hamnar vi på så stora tal så att allt i universum drunknar i det. Uttrycket fullkomligen exploderar redan efter fyra steg. Hur hittar man lösningar på en ekvation som betar sig så brutalt? På gymnasiet eller på universitetet lärde man sig inga självklara metoder för att hantera den här typen av ekvationer. Men det finns ett enkelt trick:

Vi tar utgångspunkt att $x^{x^{x^{\cdots}}} = 2$.

Vi sätter in det i ekvationen och ersätter allt som står ovan det första x :et med 2.

Vi får då $x^2=2$, vilket ger $x=\sqrt{2}$, som alltså är lösningen till ekvationen ovan.

Det är något fascinerande, ja till och med vackert, med att om man tar $\sqrt{2}$ upphöjt till sig själv ett oändligt antal gånger så konvergerar uttrycket i slutändan till 2. Man kan testa själv och se hur det går.

Vi börjar med $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=1,6325$.

Vi fortsätter med $\sqrt{2}^{1,6325}=1,76$.

Därefter får vi $\sqrt{2}^{1,76}=1,84$.

Efter tjugo iterationer är vi uppe på 1,9996...

För varje steg så ökar värdet på uttrycket allt mindre. Det verkar alltså som att funktionens värde konvergerar mot 2, för varje ytterligare iteration.

Här ligger det en hund begravnen

Man skulle kunna stanna här och nöja sig med att man lyckas lösa ett komplext problem med enkla medel. Men testa då med ekvationen $x^{x^{x^{\dots}}}=4$ på samma sätt som vi gjorde ovan. Då kan vi ersätta exponenttornet med en fyra, och vi får då: $x^4=4$, vilket i sin tur ger $x=\sqrt{2}$. Oups!!!

Vi får alltså att $\sqrt{2}$ är en lösning till både ekvationen $x^{x^{x^{\dots}}}=2$ och till ekvationen $x^{x^{x^{\dots}}}=4$. Det skulle ju då betyda att man får både 2 och 4 om man upphöjer $\sqrt{2}$ i all oändlighet, eller alternativt uttryckt att $2=4$. Men det är ju inte möjligt. Gör man denna operation borde man bara kunna få ett (!) svar, inte två. Här tycks en hund ligga begravnen.

Liknande underligheter hamnar man i om försöker lösa $x^{x^{x^{\dots}}}=3$. Då får man, med ovan beskrivna metod, att lösningen skulle vara $x=\sqrt[3]{3}$. Men om man sätter in det svaret i vårt oändliga exponenttorn så får vi att det uttrycket konvergerar mot 2,47805. Det är återigen något som inte stämmer. Det här var lurigt. Vi behöver undersöka vårt torn av exponenter ytterligare för att förstå vilka lösningar som är korrekta och vilka som inte är det.

Vilka lösningar gäller?

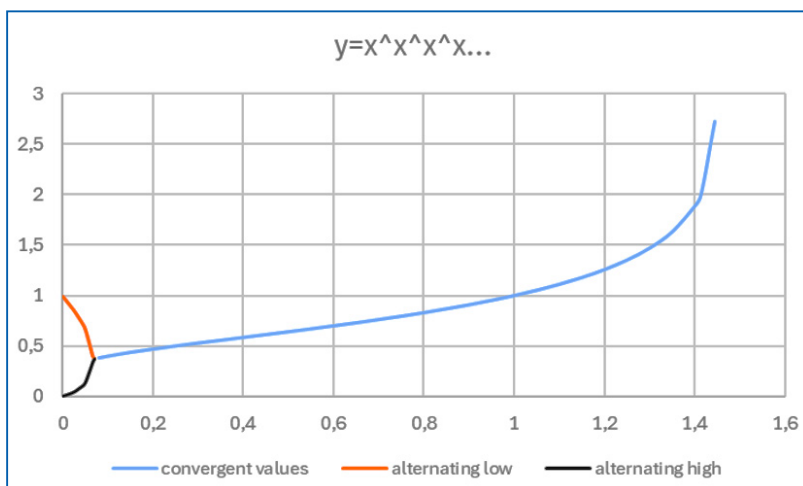
Låt oss titta närmare på följande funktion $y(x)=x^{x^{x^{\dots}}}$

För $x=1$ är det trivalt, då får vi helt enkelt $y=1$, eftersom $1^1=1$.

För $x=\sqrt{2}$, får vi $y=2$.

För $x=3$ så fullständigt exploderar uttrycket.

I figur 1 har jag plottat y som funktion av x .



Figur 1. En plot av vårt oändliga torn av exponenter. Om $x > e^{(1/e)} \approx 1,44\dots$ så divergerar funktionen. För $x < e^{(1/e)}$ så alternerar (hoppas) funktionens värde mellan den högre och den undre grenen i figuren.

Man ser här att när x är större än cirka 1,4 (jag återkommer snart till det exakta värdet), så sticker värdet på y iväg rakt upp i oändligheten. Det visar sig att högsta värdet y kan anta är drygt 2,7. Det som händer när man sätter in ett större x -värde, exempelvis $x = 1,5$, är att funktionen divergerar.

Det här ger oss också svaret på gåtan varför vår lösning när högerledet var lika med 4 inte fungerade. Vi utgick från att $x^{x^{x^{\dots}}} = 4$, men denna ekvation saknar lösning. Oavsett vilket värde man väljer för x blir funktionens värde aldrig fyra. Så när vi använder $y(x) = 4$ för att lösa ekvationen begår vi alltså våld mot den. Vi använder något som inte är sant, och därmed blir lösningen inte korrekt. Det är lite som att lösa en ekvation $x + 7 = x + 5$, och subtrahera x , för att bevisa att $7 = 5$. Samma invändning gäller också när högerledet sattes lika med 3.

När man tillämpar en sådan här teknik så måste man alltså också kolla att lösningen konvergerar. Det här är en bra påminnelse att enkla knep inte alltid fungerar.

Funktionens högsta värde

Men låt oss nu titta lite närmare på figur 1. För vilka värden på x konvergerar uttrycket? Vilket är det största tal som y kan anta (som alltså inte är oändligheten)?

Den första som löste detta problem var Leonhard Euler (1707–1783). Han är en av matematikens riktigt stora, kanske den allra störste. Det finns en mycket underhållande föreläsning på Youtube med titeln *An evening with Leonhard Euler* som jag med varm rekommendation skickat runt till mina matematikintresserade vänner. Mot slutet av sitt liv blev Euler blind, men lyckades ändå, vid 70 års ålder, producera en uppsats i matematik – per vecka! Euler fann att det oändliga exponenttornet $y = x^{x^{x^{\dots}}}$ konvergerar om x befinner sig i intervallet

$$e^{-e} \leq x \leq e^{1/e}$$

där e är den matematiska konstanten $e = 2,7118\dots$. Numeriskt finner vi att den undre gränsen ungefär är lika med 0,0066 och den övre approximativt är lika med 1,44.

Om man sätter in det högre värdet får man att det maximala värdet på exponenttornet blir $y = e$. Bakom det oändliga tornet av exponenter finns alltså den matematiska konstanten e som det högsta värdet som kan uppnås. Det är något fascinerande med att e uppträder på en massa olika ställen i fysiken och matematiken.

Hoppande värden

Om x ligger i intervallet $0 < x \leq e^{-e}$ uppstår en speciell situation. Det oändliga tornet av exponenter sticker inte i väg till oändligheten, men det konvergerar inte heller mot ett specifikt värde. Snarare hoppar det mellan ett högre och ett lägre värde, om vartannat, när man beräknar funktionens värde för ytterligare en exponent.

Konvergens i det komplexa talplanet och fraktala mönster

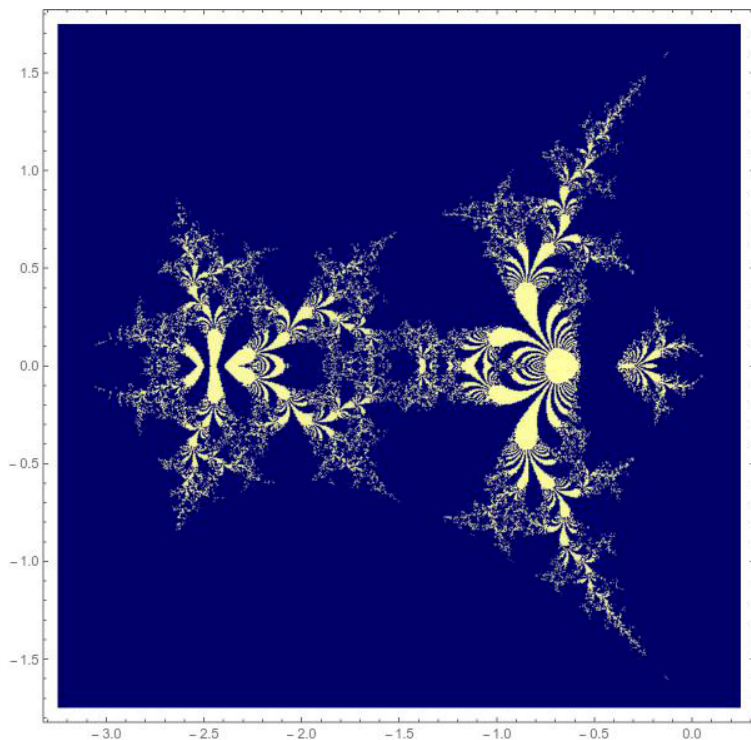
Hittills har vi bara undersökt det oändliga tornet av exponenter för positiva reella tal. Men man kan ju också upphöja komplexa tal, alltså tal som innehåller det imaginära talet $i = \sqrt{-1}$. Jag ska inte gå in på detaljer om hur man upphöjer komplexa tal till komplexa tal, men även här kommer Euler till vår hjälp. Det är ju han som ligger bakom den matematiska identiteten:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Det är en ekvation som fysikern Richard Feynman en gång beskrev som den mest anmärkningsvärda i matematiken. Med hjälp av den får man den stiliga relationen $e^{i\pi} + 1 = 0$, som binder samman matematikens fem kanske viktigaste tal: $e, \pi, i, 1$ och 0 .

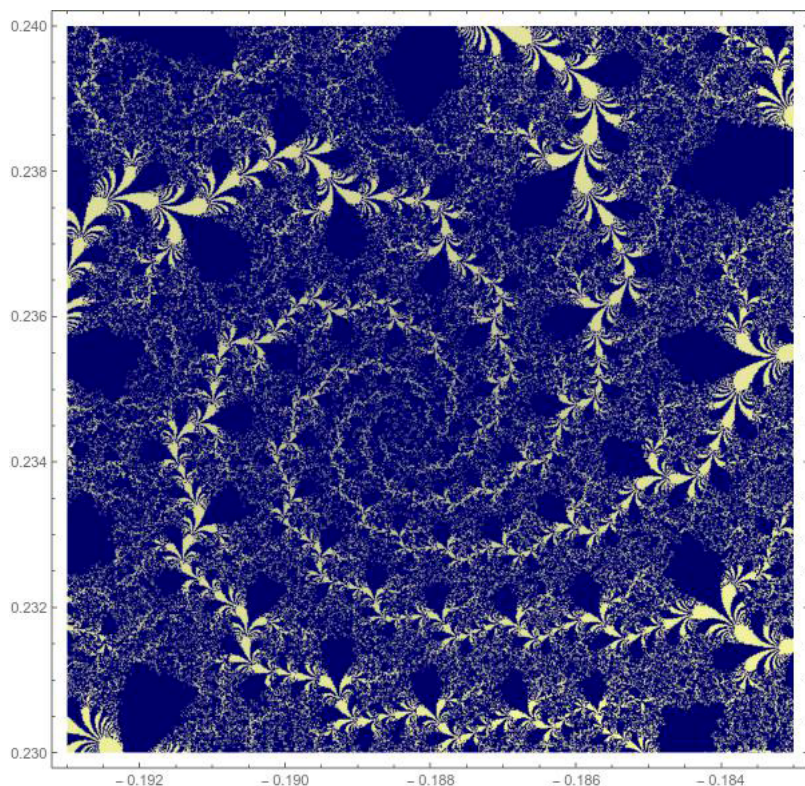
Hur som helst, med hjälp av ovanstående identitet kan man också beräkna värdet av ett komplext tal upphöjt till ett annat. Om vi betecknar detta komplexa tal med z , så kan vi nu alltså beräkna när och om det oändliga exponenttornet $z^{z^{z^{\dots}}}$ konvergerar.

I en artikel med titeln *The Fractal Boundary of the Power Tower Function* visar forskaren Peter Lynch figurer som visar var i det komplexa talplanet som det oändliga exponenttornet divergerar (ljus färg i figuren) och konvergerar eller hamnar på en stabil periodisk bana (mörkblå färg i figuren). I figur 2 ges en överblicksbild (den reella delen av z varierar från minus 3 till 0,1).



Figur 2. I figuren ser vi var i det komplexa talplanet det oändliga exponenttornet konvergerar (mörk färg) och var det divergerar (ljus). [Källa: Lynch, 2017]

I figur 3 zoomar vi in på en väldigt liten del av figur 2, ja så lite som cirka en hundratusendel av den. Här öppnas helt nya vackra och fascinerande mönster. Det är lite som att titta ner i en avgrund, eller är det kanske öppningen till ekvationens hjärta vi ser?



Figur 3. *Spiralformat mönster uppträder när man zoomar in på en väldigt liten del av figur 2. [Källa: Lynch, 2017].*

Låt dig inspireras!

Avslutningsvis tänker jag att den här ekvationen kan användas för att inspirera och utmana specialintresserade studenter på gymnasienivå eller i speciella projekt på universitetet. Genom att gräva sig djupare ner i detta kan man lära sig mer om oändliga serier, konvergens och fraktaler samt testa sina kunskaper både analytiskt och numeriskt

LITTERATUR

- Lynch, P. (2017, Augusti). The fractal boundary of the power tower function.
I J. Nuno Silva, *Recreational Mathematics Colloquium V: Proceedings of the Recreational Mathematics Colloquium V*. Associacao Ludus. (s 127–138)