

Generera exempel

För att lära sig matematik behöver man få en djup och nyanserad förståelse för matematiska begrepp. Genom att strukturerat låta elever generera exempel och icke-exempel kan deras begreppsförståelse både synliggöras och vidgas.

Elevers förståelse av ett matematiskt begrepp bestäms ofta av ett begränsat antal prototypiska exempel. När man ber en elev att rita en fyrhörning kommer de allra flesta att rita en rektangel med sidorna parallella med papprets kanter. Ber man om ett exempel på ett bråk får man i de allra flesta fall ett stambråk, och ber man om en rät linje kommer majoriteten av dem att ha positiv lutning. Ett effektivt sätt att låta elever se många varierade exempel på ett matematiskt begrepp är att använda uppgiftstypen *Generera exempel*.

Vad är *Generera exempel*?

Den grundläggande strukturen i uppgiftstypen är enkel. Du ber eleverna att ge ett exempel på ett bestämt matematiskt begrepp, sedan ett exempel till, och därefter ännu ett. Du kan till exempel uppmana eleverna att ge ett exempel på ett tal i bråkform med värdet $\frac{2}{5}$ eller be dem ge exempel på tal som löser ekvationen $2x + y = 7$.

Ge ett exempel på ett tal i bråkform med värdet $\frac{2}{5}$.

Ett till ...

Och ett till ...

Ge exempel på två tal, x och y , som löser ekvationen $2x + y = 7$.

Två till ...

Och ytterligare två ...

Genom att uppmana eleverna att hitta fler än ett exempel, utmanas de att hitta andra exempel än dem de först kommer att tänka på. Dessutom kan de få syn på att det finns oändligt många exempel som uppfyller villkoren.

Skapa variation

Ett av syftena med *Generera exempel* är att eleverna ska utvidga sina *exempelmängder*, ett begrepp som de brittiska forskarna Anne Watson och John Mason använder för att beskriva den mängd av exempel som en elev kommer att tänka på när man ber dem att exemplifiera ett matematiskt begrepp. Det innebär till exempel att elever inser att lösningarna till ekvationen $2x + y = 7$

inte bara består av positiva heltal, utan också kan vara negativa tal eller decimaltal. Ett sätt att åstadkomma det är att be eleverna att ge exempel som

- ♦ skiljer sig så mycket som möjligt från deras första exempel
- ♦ ingen annan i klassen/skolan/världen skulle komma att tänka på.

Ett annat sätt att skapa variation, och samtidigt göra uppgiften mer utmanande, är att lägga till villkor. Det begränsar antalet möjliga svar och gör att eleverna behöver söka svaren mer systematiskt.

Ge exempel på två tal, x och y , som löser ekvationen $2x + y = 7$ där

... ett av talen är negativt

... ett av talen är $\sqrt{2}$

... minst ett av talen är ett tal i bråkform

... ett av talen är större än 1 000 000.

Generalisera

Från den här variationen av exempel blir det naturligt att generalisera. Vad har alla de här exemplen gemensamt? Finns det något sätt att matematiskt beskriva dem alla, på en och samma gång? Varje tal i bråkform med värdet $\frac{2}{5}$ kan till exempel beskrivas med det algebraiska uttrycket $\frac{2n}{5n}$, och samtliga lösningar (x, y) till ekvationen $2x + y = 7$ kan representeras av en rät linje i ett koordinatsystem. På det här sättet kan man med hjälp av den här uppgiftstypen ta steget från en mångfald av exempel till det generella.

Varför använda Generera exempel?

Det finns flera skäl till att arbeta med att generera exempel:

- ♦ När elever får i uppgift att ge ett exempel på ett matematiskt begrepp behöver de på djupet fundera över vad som utmärker det. För att kunna ge fler exempel tvingas de dessutom söka mer systematiskt. Det tränar elevernas begreppsförmåga och utvidgar deras exempelmängder.
- ♦ Att ha begränsade exempelmängder kan leda till missuppfattningar. En elev som bara kommer att tänka på heltalslösningar till ekvationen $2x + y = 7$ kan till exempel få svårt att förstå kopplingen till den grafiska representationen, där ekvationens oändligt många lösningar representeras av en sammanhängande rät linje i ett koordinatsystem. På samma sätt kan en elev som bara får se månghörningar som är konvexa, som bara löser ekvationer med positiva heltalsrötter och som uteslutande arbetar med bråk mellan 0 och 1, komma att tro att dessa ovidkommande särdrag är betydelsebärande egenskaper. Att låta eleverna generera exempel kan på det här sättet motverka vanliga missuppfattningar.
- ♦ Att kunna ge exempel på matematiska begrepp är användbart när man vill förstå ett nytt begrepp, tolka en obekant definition eller konkretisera för sig själv vad som menas med en matematisk sats. På så sätt kan uppgiftstypen Generera exempel lära eleverna en värdefull matematisk strategi.

- ♦ Att arbeta med att generera exempel ger också dig som lärare en bild av elevernas kunskaper. Är exemplen korrekta? Är de varierade eller hämtade från en begränsad exempelmängd? Har eleven genererat dem med lätthet eller med ansträngning, med trial-and-error eller med systematik?

Så här kan du arbeta

Generera exempel är en uppgiftstyp som genomförs i helklass. När eleverna redovisar sina svar inför klassen kan du synliggöra en rik variation av exempel. Så här kan en arbetsgång se ut:

1. Initiera arbetet genom att uppmana eleverna att ge ett exempel på ett bestämt matematiskt begrepp. Du kan till exempel be dem att ge exempel på en särskild typ av tal, en funktion eller en geometrisk figur.

Ge ett exempel på en geometrisk talföljd.

En till ...

Och en till ...

2. Låt eleverna redovisa sina svar. Ett sätt är att låta dem skriva sina exempel på miniskrivtavlor som sedan visas upp i klassen. Om eleverna inte är bekväma med att visa sina svar för varandra, kan du i stället gå runt i klassrummet och välja ut några svar som du skriver upp på tavlan och som du bjuder in eleverna att reflektera kring. Ett tredje alternativ är att samla in svaren digitalt.
3. Bjud in eleverna att reflektera över och reagera på varandras svar. Det kan göras med frågor som
 - fokuserar på exemplens likheter och skillnader: Vad har alla exempel gemensamt? Vad skiljer dem åt? Är det några exempel som hör ihop?
 - fokuserar på begreppets definition: Kan ni förklara varför det här är ett exempel på en geometrisk talföljd? Är det något av svaren som inte är en geometrisk talföljd?
 - öppnar för åsikter och undringar: Är det något ni undrar över när ni ser de här exemplen? Finns det något exempel som är särskilt kreativt/annorlunda/intressant?

Diskussionen kring de redovisade svaren behöver inte nödvändigtvis ske i helklass. Du kan också låta eleverna diskutera någon eller några frågor i par.

4. Uppmana eleverna att generera fler exempel. Om det behövs kan du stimulera dem till större variation i sina svar genom att be dem om exempel som
 - skiljer sig så mycket som möjligt från deras första exempel
 - uppfyller vissa villkor
 - ingen annan i klassen/skolan/världen skulle komma att tänka på.

Ett annat sätt att stimulera eleverna att utvidga sina exempelmängder är att du själv – anonymt – bidrar med en exempeltyp som ingen i klassen har kommit att tänka på. Samma effekt kan du ibland uppnå genom att notera och fundera kring elevernas svar: "Jag lägger märke till att alla era talföljder är växande. Måste det vara så?" eller "Jag ser att elementen i era talföljder är heltal. Jag undrar om det finns geometriska talföljder vars element inte är heltal."

5. När eleverna har genererat ett antal exempel, kan du välja att gå vidare till att generalisera. Går det att formulera en beskrivning i ord eller ett algebraiskt uttryck som beskriver alla exempel på en och samma gång? Du kan också gå vidare med uppgiften genom att låta klassen generera icke-exempel: Ge ett exempel på en talföljd som *inte* är geometrisk.

Några erfarenheter

Att arbeta med Generera exempel innebär att man som lärare släpper en del av kontrollen. Man vet inte i förväg vilka exempel som eleverna kommer att generera och därmed inte vilken riktning lektionen kommer att ta. Det kan kännas både spännande och otäckt på samma gång. Tänk därför noga igenom uppgiften i förväg. Vilka exempel tror du att dina elever kommer att generera, och vilka tror du att de inte kommer att tänka på? Hur skulle du kunna ändra frågeställningen för att skapa variation i elevernas svar? Vilka frågor kan du ställa för att stimulera dem till djupare tänkande? På vilket sätt kan du bygga vidare på elevernas mångfald av exempel för att göra kopplingar till matematiska idéer, procedurer och begrepp?

LITTERATUR

- Bills, C. m fl (2004). *Thinkers: a collection of activities to provoke mathematical thinking*. Association of Teachers of Mathematics.
- Bills, L. m fl (2006). Exemplification in mathematics education. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 1. 126–154.
- Reuterswärd, E. (2024). *Tio uppgiftstyper i matematik*. Gymnasiet. Natur och Kultur.
- Reuterswärd, E. (2024). *Tio uppgiftstyper i matematik*. Högstadiet. Natur och Kultur.
- Watson, A. & Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. I A. Cockburn & E. Nardi (red). *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education*. University of East Anglia. 2, 377–385.
- Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners generating examples*. Erlbaum.