

Att undervisa för förståelse

Vad innebär det att förstå något och hur genomförs undervisning som leder till förståelse? Författarna redovisar här insikter från ett projekt där de undersöker effekten av *retrieval practice*, även kallat *testbaserat lärande*.

Ett vanligt begrepp i forsknings- och studentlitteratur såväl som i styrdokument är förståelse. Samtidigt är det få som förklarar vad det innebär att förstå något. Att ha en målsättning med undervisningen att eleverna ska förstå innehållet kan uppfattas som självklart. Men hur genomförs sådan undervisning och hur vet man att elever förstått? I projektet *Kreativa resonemang förstärkta av testbaserat lärande* som finansieras av Skolforskningsinstitutet har vi utvecklat undervisning där en av målsättningarna är att eleverna ska förstå matematiken på ett djupare plan än att bara kunna lösa uppgifter de blir tilldelade.

Att resonera kreativt med stöd av förkunskaper

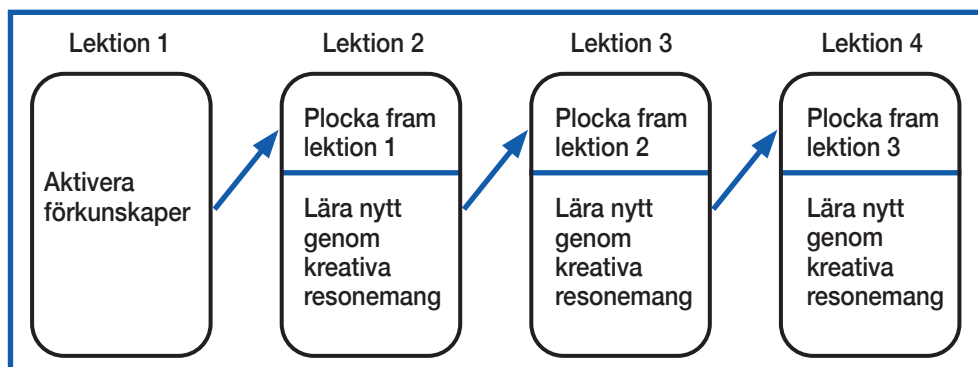
I projektet använder vi forskaren Johan Lithners definition av kreativa matematiska resonemang som utgångspunkt för att designa undervisning. Att resonera kreativt innebär att med stöd i sina matematiska kompetenser skapa lösningsmetoder samt att med stöd i matematik formulera argument för lösningsmetoden och lösningen. Studier har visat att elever som resonerar kreativt när de löser matematikproblem minns bättre vad de lär sig än elever som löser uppgifter enligt lösningsmetoder de fått genom instruktioner. Elever som resonerat kreativt är dessutom bättre på att använda sina kunskaper vid fortsatt problemlösning. Dessa resultat är i linje med teorier om att förståelse handlar om att skapa kopplingar mellan nya och existerande kunskaper. Det innebär också att uppgifterna måste vara utformade så att eleverna har användning av sina tidigare kunskaper för att förstå och kunna lösa dem.

Ett problem vi haft i ett tidigare projekt är att elever inte använder de kunskaper de rimligtvis har för att lösa och motivera lösningar på problem. Därför har vi tittat närmare på forskning om så kallat *retrieval practice* (på svenska översatt som *testbaserat lärande*). En sådant arbetssätt handlar om att öva på att hämta information från långtidsminnet till arbetsminnet (inte att testa elevers kunskaper). I forskning har detta visat sig stärka lärandet genom att kopplingen mellan olika kunskaper stärks för varje gång information hämtas från långtidsminnet. Samma resonemang förs ofta angående förståelse, att det handlar om att skapa fler kopplingar mellan olika kunskaper. Om vi nu sammanfogar dessa utgångspunkter ser vi att användningen av tidigare kunskaper för att konstruera lösningar på problem innebär hämtning

av kunskaper från långtidsminnet och att det kreativa resonemanget skapar kopplingar mellan kunskaper som gör det lättare att hämta fram dem från långtidsminnet en tid efter att problemet lösts. Vi förmodar alltså att kombinationen av *kreativa resonemang* och *retrieval practice* har synergieffekter som tillsammans ger ett starkare lärande och en djupare förståelse för matematik än de gör var för sig. Ytterligare en effekt vi noterat under projektet är att elever oavsett vilken matematisk nivå de befinner sig på blir tryggare i att försöka lösa problem när de uppmanas att använda sina förkunskaper.

Att planera lektioner

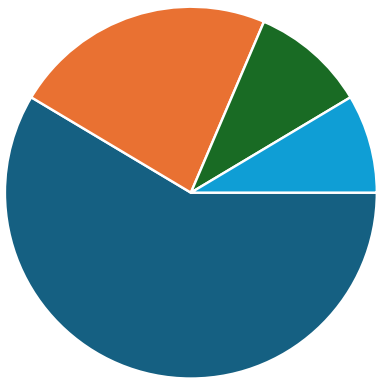
Som stöd för att planera lektioner har vi gjort en mall där eleverna i en första separat lektion får aktivera de förkunskaper de behöver använda för att lösa uppgifter som innehåller ny matematik.



Figur 1. Vår mall för att planera lektioner i projektet.

Nästa lektion inleds med att eleverna får korta uppgifter liknande dem från första lektionen, vilket innebär att eleverna får plocka fram användbara förkunskaper. Därefter löser eleverna uppgifter genom kreativa resonemang med stöd i sina förkunskaper. Följande lektioner inleds alltid med några uppgifter liknande de som eleverna mött under föregående lektion innan de arbetar med uppgifter som innehåller det nya som ska läras.

Om det nya eleverna ska lära sig är att konstruera delar i ett cirkeldiagram med gradskiva kan det handla om att plocka fram och aktivera förkunskaper om att mäta och konstruera vinklar, att ett helt varv i en cirkel är 360° och att räkna med procent. Då kan en ny kunskap som att inse att 1% är $3,6^\circ$ i ett cirkeldiagram i nästa lektion läras och förstås med stöd av dessa förkunskaper.



Att ha förståelse och fallenhet för matematik

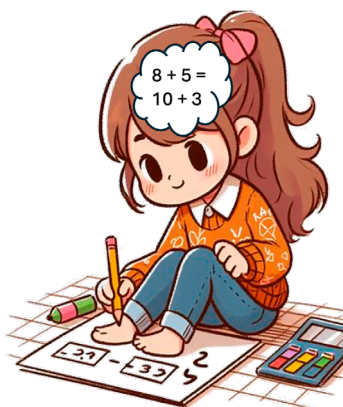
I matematikundervisningen är det vanligt att läraren tar ansvar för att eleven ska förstå. Det kan läraren göra antingen genom att gå igenom och förklara hur matematiken hänger ihop innan eleverna löser uppgifter eller att, när eleven inte klarat av en uppgift, förklara varför och hur eleven ska göra i stället för att det ska bli rätt svar. Alla som har undervisat i matematik vet att det är stor individuell skillnad på när förklaringar leder till att elever förstår. Även här finns ibland en tendens att se kategoriskt på elevers möjligheter att förstå lärarens förklaringar genom att påstå att vissa har fallenhet för matematik och andra inte. Det kan istället var så att lärarens förklaringar inte hjälper eleven att förstå om de förkunskaper som behövs saknas.

Rimligtvis finns det genetiska aspekter för förutsättningar att lära och förstå matematik men vi menar att det inte är fruktbart att nöja sig med det som förklaring till varför vissa elever förstår och andra inte. Bert Jonsson och Lars Nyberg berättar i sin bok *Testbaserat lärande* att forskning har kommit fram till att en personlig egenskap som är överrepresenterad hos framgångsrika elever i matematik (och i andra ämnen) är ett behov av att problematisera och förklara (översatt från engelska *need for cognition*). Närmare bestämt handlar det om ett behov hos individen att sätta ny information i relation till redan kända sammanhang, att koppla det nya till det som redan är känt. Detta behov kan ha sitt ursprung i en medfödd hög kognitiv kapacitet men det är minst lika troligt att den utvecklas hos barn som växer upp i sociala miljöer där förklaringar tidigt uppmuntras och utmanas. Med en sådan utgångspunkt är det naturligt för en lärare att fokusera på det som går att påverka, det vill säga det som kan utvecklas i undervisningen. Det medför att läraren behöver ha en syn på lärande och förståelse som en aktiv process, insikter i elevernas tidigare kunskaper och kunskap om hur det nya som ska läras kan förstås med stöd av tidigare kunskaper.

Olika aspekter av förståelse

Forskarna Janet M. Duffin och Adrian P. Simpson beskriver i en teoretisk artikel från år 2000 tre aspekter av förståelse som:

1. att ha existerande kopplingar mellan redan känd information
2. valet av existerande kopplingar för att lösa problem
3. en ständigt pågående utveckling av kopplingar mellan ny och känd information.



Författarna betonar att det är *aspekter av* förståelse, *inte delar av* förståelse. Vi kan tänka oss att elever på lågstadiet har arbetat med tiokamrater (och därmed har existerande förståelse för vilka ensiffriga talpar som har summan 10) och sedan får problemet $8 + 5$. De kan nu använda den existerande kopplingen att $8 + 2$ är 10 och skapa den nya kopplingen att det som är kvar av 5, det vill säga 3, läggs till 10. Vi kan då se förståelsen ur alla tre aspekter, eleverna har förståelsen för tiokamrater, de väljer den för att lösa problemet $8 + 5$ och de utvecklar förståelsen för tiotalsövergångar. Att se på förståelse på detta sätt innebär en uppfattning om att förståelsen inte är statisk, utan att den ständigt utvecklas. Till exempel kan de kopplingar som har skapats sedan användas för att lösa problemet $18 + 5$. Det blir också tydligt att ju fler kopplingar som finns mellan existerande kunskaper, desto större är förutsättningarna att lösa problem.

Här kan vi reflektera över det som tidigare sagts om den personliga egenskapen att ha behov av att problematisera och förklara. Den som har den egenskapen bygger ständigt upp nya användbara kopplingar mellan ny och existerande kunskap, vilket ökar möjligheterna att lära sig nya saker. Det är också troligt att en sådan elev finner att det blir roligt att lära sig. Omvänt, den som i lägre grad känner behov av att problematisera och förklara hamnar med tiden allt längre efter kunskapsmässigt. Därför behöver dessa elever kompenseras, till exempel genom att lärare planerar undervisning som uppmuntrar elever att motivera sina lösningar.

Arbetsminne och långtidsminne

Tyvärr är det många som inte finner glädjen i att lära sig och förstå matematik. Vi ska nu försöka förklara vad det kan bero på och finna vägar för att ändra på det. Vi utgår från ett exempel:

$$\text{Lös ekvationen } \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4}} = 2$$

Den som ska lösa ekvationen måste ta in informationen, förstå den och komma fram till hur förståelsen kan användas för att nå en lösning. För den som har existerande förståelse för roten ur-begreppet, för likhetstecknet och kan multiplicera tal i bråkform blir uppgiften möjlig att lösa. Den som inte har dessa kunskaper får svårt att lösa uppgiften utan instruktioner och förklaringar. Men även med instruktioner och förklaringar kan det vara svårt att förstå vad som ska göras.

Detta förklaras av bland andra forskaren Paul Sweller med stöd av teorier om kognitiv belastning. Då tänker man sig att de aktiva och medvetna processerna sker i hjärnans arbetsminne. Information till arbetsminnet kommer dels från omgivningen via sinnen, dels från långtidsminnet. När information tas in via sinnen sätter arbetsminnet det i relation till relaterad information som hämtas från långtidsminnet varefter den sammanlagda informationen processas. För den som inte har användbar information att hämta från långtidsminnet måste arbetsminnet även processa behövlig information från omgivningen, till exempel en lärares instruktioner och förklaringar. Men då arbetsminnet bara kan hantera en begränsad mängd

information från omgivningen finns risken att arbetsminnets kapacitet inte räcker till för att lösa problemet, till exempel ekvationen i exemplet. Det finns däremot ingen känd begränsning av hur mycket information arbetsminnet kan ta emot från långtidsminnet. Det innebär att när informationen som tas in via sinnen kan kopplas till tidigare kunskaper, så minskar belastningen på arbetsminnet som då har mer kapacitet att lösa problemet.

Vi har tidigare tagit upp den personliga egenskapen att ha behov av att problematisera och förklara och att den är överrepresenterad hos elever som är framgångsrika i matematik. Det är rimligt att den egenskapen leder till att eleven över tid bygger mer förståelse. Den som förstår mer har fler kopplingar mellan existerande kunskap vilket leder till större möjligheter att ta in, förstå och lösa matematiska problem. Den som däremot ständigt hamnar i situationer där arbetsminnet blir överbelastat tappar snart lusten för matematik. I den allmänna debatten uttrycks detta ofta som att elever som har svårt med matematik måste öva på grunderna och att detta måste ske genom memorering av basala matematiska metoder. Vi håller med om att elever behöver matematiska grunder men är tveksamma till om det fungerar att memorera dessa. Istället bör även matematiska grunder läras genom att elever relaterar till sina förkunskaper. I undervisningen är det alltså viktigt att avväga hur mycket ny information eleven ska få och att eleven måste ha tidigare kunskaper att relatera ny information till. Eftersom det som alla lärare vet oftast är stor spridning på elevernas förkunskaper är detta en utmaning.

Undervisning som utvecklar förståelse för matematik

Hur omsätts då aspekter av förståelse och insikter om hur arbets- och långtidsminnet fungerar till klassrumsundervisning? Vi ska nu ge ett konkret exempel på hur undervisningen går till från en intervention i årskurs 8. Målsättningen för de tre lektionerna i interventionen var att eleverna skulle lära sig använda ekvationer som problemlösningsmetod. Vi utgick från att eleverna sedan tidigare hade användbara kunskaper i ekvationslösning, förenkling av uttryck med obekanta och problemlösning utan att ställa upp en ekvation. På lektion 1 fick eleverna aktivera sina kunskaper om att lösa ekvationer och förenkla uttryck. Lektion 2 innehöll problem med två obekanta tal med ett givet förhållande mellan de båda, liknande den här:

Eva och Kennet har tillsammans 115 kr, Kennet har 5 kr mindre än Eva. Hur många kronor har var och en? Lös uppgiften på valfritt sätt och med ekvation. Förklara varför ekvationen fungerar.

Problemen på lektion 3 innehöll två obekanta som presenterades genom två olika samband, till exempel följande:

I en hage finns sammanlagt 20 djur, det är kor och höns.
Hur många kor finns det om det är 64 ben i hagen?

Under lektion 3 räknade vi med att eleverna från lektion 2 hade fått erfarenheter av att lösa problem genom att ställa upp en ekvation. Som underlag för detaljplanering av lektioner använde vi projektets lektionsmall, se figur 1.

Lektion 1

Lektion 1 ägnades åt att aktivera de förkunskaper som eleverna antogs ha, i detta fall ekvationslösning, förenkling av uttryck och problemlösning utan att använda ekvation. Uppgifterna utformades så att eleverna uppmuntrades att försöka komma ihåg och hämta fram sina tidigare kunskaper.

Lektion 1, aktivera förkunskaper

1. Lös ekvationerna

$x + 12 = 30$	$x - 15 = 45$
$4x = 36$	$x / 5 = 15$
$4x - 3 = 33$	$x / 10 + 5 = 12$

2. Förenkla uttrycken

$4(x + 5)$	$-4(x + 5)$
$-4(x - 5)$	$5 - 3(2x - 3)$

Lektion 2

Lektion 2 inleddes med att eleverna fick lösa några liknande uppgifter som på lektion 1. De fick då ytterligare ett tillfälle att hämta kunskaper från långtidsminnet. Sedan övergick lektionen till att lära sig ny matematik med stöd av de kunskaper som hämtats fram. I exemplet innebar det att eleverna fick matematiska problem och uppmanades att lösa dem både med och utan ekvationer. Det är då viktigt att de konstruerar egna lösningar och argumenterar för dem, samt att uppgifterna går att lösa på olika nivåer. Alla elever ska kunna komma fram till delar av lösningarna. Lektionen avslutades med en helklassdiskussion då utvalda lösningar togs upp.

Lektion 2

1. Plocka fram från lektion 1

$5x + 7 = 32$	$x / 3 - 8 = 4$
$2(x + 6) = 30$	$3x / 5 = 6$
$6(x - 2) + 10 = 22$	$-5(2x - 7) = 5$

2. Exempel på lära nytt-uppgifter

Eva och Kennet har tillsammans 115 kr, Kennet har 5 kr mindre än Eva. Hur många kronor har var och en? Lös uppgiften på ett valfritt sätt och med ekvation. Förklara varför ekvationen fungerar.

Lena, Pia och Therese säljer chips till sin klasskassa. Tillsammans säljer de 243 påsar. Pia säljer tre gånger så många påsar som Lena. Therese säljer fem fler än Pia. Hur många påsar säljer Therese?

Lektion 3

Lektion 3 inleddes med ett par uppgifter som liknade de som löstes under lektion 2. Eleverna fick alltså först hämta det de kom fram till under föregående lektion ur långtidsminnet. Under den fortsatta lektionen arbetade eleverna med uppgifter som kan lösas med kunskaper som lärts under lektion 2. Enligt modellen fortsätter lektionsserien på samma sätt: varje lektion inleds med att lösa en eller ett par uppgifter som liknar uppgifterna från föregående lektion, varefter eleverna löser uppgifter som innebär nytt lärande tills lärandemålen anses uppfylla.

Lektion 3

1. Plocka fram från lektion 2

Lina och hennes systrar har 145 kr i veckopeng tillsammans. Lina har 15 kr mer än sin syster. Hur mycket har Lina i veckopeng?

Tomas och hans två kompisar pantar burkar. De pantar 355 burkar tillsammans. Rune pantar dubbelt så många som Tomas och Karin pantar fem burkar mindre än Tomas. Hur många burkar pantar Tomas?

2. Exempel på lära nytt-uppgifter

I en hage finns sammanlagt 20 djur, det är kor och höns. Hur många kor finns det om det är 64 ben i hagen?

På en parkering står 34 fordon. Det är bilar och motorcyklar. Fordonen har 96 hjul tillsammans. Hur många bilar står på parkeringen?

Så här gick det

De inledande lektionerna fungerade bra. Under lektion 1 klarade samtliga elever att lösa ekvationer, förenkla uttryck och lösa problem genom att komma ihåg vad de gjort under tidigare lektioner. Skiftande stöd från läraren behövdes. Vissa klarade alla uppgifter utan hjälp medan andra behövde resonera med läraren och/eller med kamrater. Det är viktigt att läraren inte tar över och visar hur lösningen ska genomföras utan istället ställer frågor som hjälper eleven att hämta kunskaper ur minnet.

Lektion 2 följde ungefär samma mönster. Vissa elever klarade allt på egen hand medan andra behövde stöd av frågor, till exempel *Vem vill du skriva som x ?* och *Om Per är x år, vad kan du då säga om Lisas ålder?* Sammantaget kom alla elever fram till lösningar som diskuterades i helklass.

Under inledningen till lektion 3 hade eleverna inga större bekymmer med att lösa uppgifter som liknade dem från lektion 2. Däremot uppstod problem redan vid den första av uppgifterna som innebar att lära nytt, den om antal ben i hagen. Några skrev $x + y = 20$ och $2x + 4y = 64$ där x betecknar antalet höns och y betecknar antalet kor, men kom sedan inte vidare. Några få elever löste uppgiften genom prövning och tabell, men kunde inte ställa upp och lösa med en ekvation vilket var lärandemålet. Vi bedömde att det

inte fanns möjligheter för eleverna att lösa uppgiften genom att konstruera egna lösningsmetoder så vi avbröt lektionen och eleverna fick arbeta med annat. I efterhand var det uppenbart att det var ett för stort steg att komma fram till hur två kända samband med två obekanta kan utnyttjas för att ställa upp en ekvation med en obekant.

När det inte fungerade som planerat

Även om det inte gick som det var tänkt var det ett värdefullt tillfälle för reflektion. I och med att lektionerna var planerade i detalj kunde vi avgöra vad som gjorde att eleverna inte kom vidare. Efter diskussioner, då vi kom fram till att de förkunskaper eleverna behövde fördjupa var att manipulera uttryck som $x + y = 20$ så att det står en obekant på ena sidan av likhetstecknet, designades en uppföljande lektion där eleverna inledningsvis löste uppgifter av typen *Olle och Stina har tillsammans 30 kr. Hur kan du utifrån det skriva hur mycket Olle har? Hur mycket Stina har?* Eleverna klarade att konstruera lösningar till dessa uppgifter och att argumentera för lösningarna. Efter att det satt sig fick eleverna den första delen av uppgiften med kor och höns och frågan *Om du vet att det är sammanlagt 20 kor och höns, hur kan du skriva antalet kor? Antalet höns?* Därefter fick de den resterande uppgiften. Nu kom eleverna efterhand i olika takt fram till hur de skulle ställa upp ekvationen (exempelvis $2(20 - y) + 4y = 64$) samt förenkla och lösa den med hjälp av sina förkunskaper. En del elever kom fram till det på egen hand, andra med stöd av frågor från läraren. När de väl löst uppgiften med kor och höns klarade de självständigt de följande uppgifterna av samma typ.

Avslutande reflektion

En avslutande reflektion är att när det under den tredje lektionen stod klart att eleverna inte skulle kunna konstruera egna lösningar hade ett alternativ varit att helt enkelt visa eleverna hur man löser sådana typer av uppgifter genom att ställa upp en ekvation. Det hade dock minskat möjligheterna för eleverna att skapa kopplingar till tidigare kunskaper. Vi menar att de som förlorar mest på detta är elever som har det jobbigt med matematiken. Risken är att det till och med blir för mycket information att hantera i arbetsminnet. Genom att i stället avbryta och ge en extra lektion där eleverna steg för steg fick plocka fram och aktivera de kunskaper som behövdes för att lösa uppgifterna gavs möjligheter att skapa de kopplingar mellan ny och känd kunskap som ökar möjligheterna att bygga djupare förståelse för matematik.

Vi som arbetar med projektet är:

Lena Salomonsson
Linda Sjöstrand
Denice D'Arcy
Marie Evald
Ann-Sofie Persberg
Carina Granberg
Maria Larsson
Jan Olsson

LITTERATUR

- D'Arcy, D. & Olsson, J. (2021). *Kreativa resonemang i matematikundervisningen – Forskningsrön i praktiken*. Studentlitteratur.
- Duffin, J. M. & Simpson, A. P. (2000). A search for understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 415–427.
- Jonsson, B. & Nyberg, L. (2020). *Testbaserat lärande: att stärka inläring och minne*. Natur & Kultur.
- Sweller, J. (2020). Cognitive load theory and educational technology. *Educational technology research and development*, 68(1), 1–16.