

Lärartankar

med Hans-Gunnar Liljenvall

"I matematiken saknas genvägar – det krävs arbete och åter arbete"

Det är rubriken till en artikel Dag Jonsson skrev 2012 i antologin "Grundskolan 50 år". Han arbetade som universitetslektor i matematisk statistik vid Uppsala universitet och är känd för sitt engagemang och ordförandeskap i SMT, skolornas matematiktävling. Han pekar på att kunskaperna i geometri radikalt försämrats från mitten av 90-talet. Juryn för SMT brukar kommentera elevernas lösningar. Kommentaren till en geometriuppgift 2001 löd:

Med viss sorg konstaterar tävlingsjuryn att geometri verkar hålla på att försvinna helt och hållet ur skolkurserna. Endast 7 % hade fått poäng på uppgiften. Många tyckte inte känna till begreppet inskriven cirkel och många kunde inte hantera likformighet korrekt.

I den här texten diskuterar jag tänkbara orsaker till försämrade kunskaper i just geometri. Det handlar till största delen om gymnasiet. Det kan tyckas mindre allvarligt att kunskaperna sjunkit för de mest högpresterande eleverna på NV och T, men enligt min mening är det tvärt om – när de eleverna inte behärskar grunder finns ett systemfel. Även de internationella kunskapsmätningarna TIMSS och PISA visar att geometri är ett sorgebarn i grundskolan.

Realskolans geometri

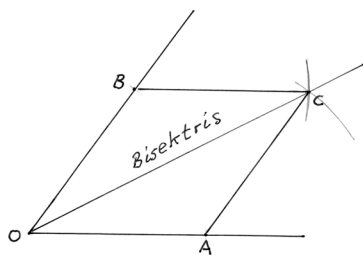
Jag gick i realskolan i mitten av 50-talet. Det var en urvalsskola som inte kan jämföras med dagens grundskola för alla, men det fanns pedagogiska och didaktiska inslag som är värda att diskutera. Det ska också nämnas att geometri utgjorde en mycket större del av matematiken än idag. Vid sidan av läroboken i matematik hade vi en bok i Euklidisk geometri. Den innehöll axiom, definitioner, begrepp och bevis av de flesta grundläggande satserna. Bevisen kan vi lämna därhän, de var för teoretiska även för realskolan. Behållningen var alla de geometriska konstruktioner med passare och linjal som illustrerade begrepp och satser. Vi fick ett matematiskt språk och kunde förstå matematisk text.

Det finns en sammanfattning av matematiska uppgifter från realexamensprov 1907–1954. I den finns mer än 600 uppgifter, men inte en enda figur! Alla uppgifterna beskrivs alltså i text och eleverna fick konstruera sina egna figurer med passare, linjal och gradskiva. Vid ett nationellt prov idag finns nästan alltid en färdigritad figur. SMT är ett undantag, där finns aldrig en figur. Det förklarar antagligen att så få elever klarade ovan beskrivna uppgift. Jag menar självklart inte att vi ska gå tillbaka 70 år, men en bättre balans måste det bli om vi ska vända den negativa trenden. Jag börjar med att beskriva några grundläggande konstruktioner och diskuterar därefter olika problemställningar.

Konstruktion av bisektris

Vinkeln AOB ritas och sträckan $OA = OB$ markeras med passaren i O. Med passaren i A respektive B markeras punkten C. Bisektrisen är strålen från O genom C.

Hur vet vi det? Svaret är att trianglarna OAC och OBC är kongruenta eftersom motsvarande sidor är lika och därmed även vinklarna.



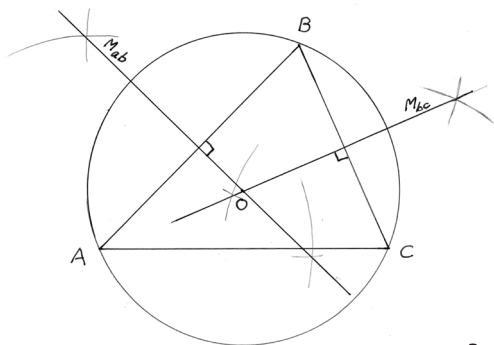
Figur 1

Omskriven cirkel

En omskriven cirkeln måste gå genom triangelns tre hörn.

Mittpunktsnormalen till sidan AB konstrueras enligt figur 1 och centrum för en cirkel genom A och B måste ligga på densamma.

Samma sak görs med sidan BC och skärningspunkten mellan M_{ab} och M_{bc} blir den omskrivna cirkelns centrum. Att trianglarna AOB, BOC och AOC är likbenta kan användas vid beräkningar.

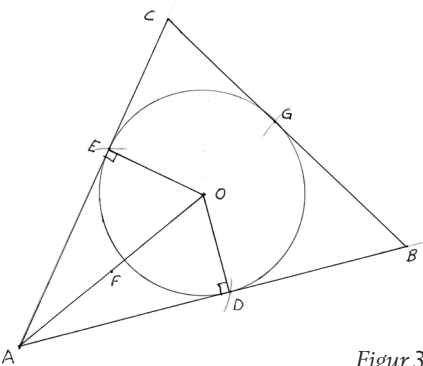


Figur 2

Inskrivna cirkel

För att förstå geometrin för den inskrivna cirkeln omskriver vi en cirkel med en triangel. En cirkel med centrum i O ritas. Hörnet A i triangeln markeras och förbindes med O. Två tangenter dras från A till D respektive A till E. F är mittpunkt på OA och blir centrum för en cirkel med radie OF. Denna cirkel ger D och E som skärningspunkter med den ursprungliga cirkeln. Periferivinkeln med en diameter som bas är rät (randvinkelsatsen).

Nu dras AD ut till B och på samma sätt konstrueras tangenterna BG och BD. BG dras till triangelns tredje hörn C, skärningspunkten mellan BG:s och AE:s förlängning. Triangeln ADO är kongruent med triangeln AEO och därmed är AO en bisektris. På samma sätt är BO och CO bisektriser. Därmed har visats att den inskrivna cirkeln har sitt centrum i bisektriser-nas skärningspunkt.



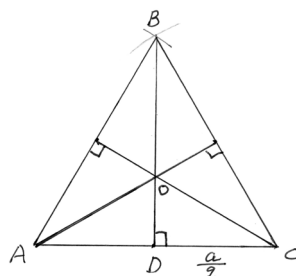
Figur 3

Liksidig triangel

För en liksidig triangel sammanfaller bisektris, mittpunktsnormal och median. I triangeln ABC i figur 4 är sidlängden a . Eftersom triangeln BCD är en 30-60-90-graders triangel är $BD = (a/2) \cdot \sqrt{3}$.

Även triangeln OCD är 30-60-90-graders och eftersom $OD = a/(2 \cdot \sqrt{3})$ blir $BD/OD = (\sqrt{3})^2 = 3$. BD delas alltså i förhållandet 2 till 1. OD är inskrivna cirkels radius som är en tredjedel av bisektrisens längd.

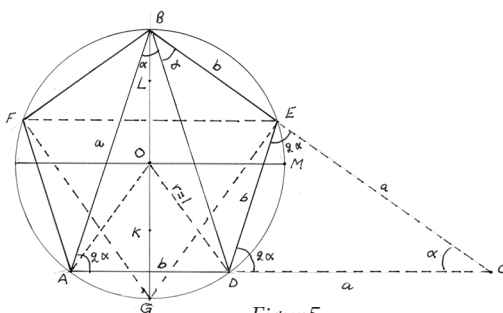
Observera att detta är ett specialfall som endast gäller den liksidiga triangeln. Medianerna däremot delas alltid 2 till 1 och det kan visas med likformighet.



Figur 4

Pentagon

Av de enklaste regelbundna polygonerna är det pentagonen (femhörningen) som historiskt rönt störst intresse. Det beror troligen på att dess konstruktion och geometri bygger på gyllene snittet. För elever i såväl grundskolan som gymnasiet innehåller pentagonen tillämpningar på flera av satserna i den Euklidiska geometrin, bland annat Pythagoras sats, randvinkelsatsen och teorin kring likformighet. Jag ger här några exempel på egenskaper och konstruktioner för pentagonen och inkluderar förklaringar och bevis. De vinklar som förekommer användes enbart för att identifiera likformighet och kongruens. De behöver därför inte beräknas. Medelpunktsvinklar och periferivinklar på olika bågar bestäms i förhållande till den periferivinkel som står på pentagonens sida och som betecknas med α .



Figur 5

Pentagonens signum är att förhållandet mellan diagonalen och sidan är lika med det gyllene snittet. Vi inleder med att bevisa detta.

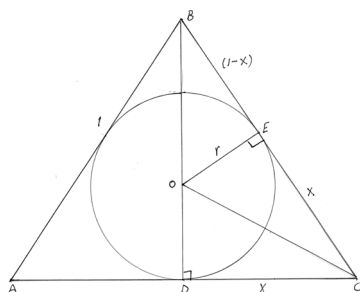
I figur 5 är en pentagon med aktuella vinklar och diagonalerna AB och BD uppritade. Dessutom är $\triangle DEC$ lagd till pentagonen. Eftersom $\triangle DEC$ är kongruent med $\triangle ABD$ är $EC = DC = a$. Likformighet mellan $\triangle ABC$ och $\triangle DEC$ ger: $a/b = (a+b)/a \Leftrightarrow a/b = 1 + b/a$ och med $a/b = \gamma$ får vi att $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 1/2 + \sqrt{5}/2 = (\sqrt{5} + 1)/2$ som är gyllene snittet.

Låt oss utnyttja detta för att bevisa konstruktionen av en pentagon. Enligt figur 5 är triangeln AOD likformig med triangeln GEF (toppvinkeln 2α för båda) och vi får $EG/1 = EF/AD = \gamma$. För pentagonens konstruktion behöver γ , som innehåller $\sqrt{5}/2$, konstrueras. En rätvinklig triangel med kateterna 1 och $1/2$ ger hypotenusan $\sqrt{5}/2$. Vi bildar därför triangeln OKM med K i $(0, -1/2)$ och M i $(1, 0)$. Enligt Pythagoras sats är $(KM)^2 = 1 + (1/2)^2 \Leftrightarrow (KM) = \sqrt{5}/2$. Med passaren i K och radien = KM markeras L och därmed blir $GL = \sqrt{5}/2 + 1/2 = \gamma$. Pentagonen konstrueras genom att markera E och F med passaren i G och radien = GL. B blir tredje hörnet. A och D bestäms med passaren i F respektive E och radien = BF eller BE.

Några rika problem

1. Från SMT 2001, ingen figur ritad

I en triangel där två av sidorna har längden 1, bestäm längden av triangelns tredje sida när den inskrivna cirkeln är så stor som möjligt.



Figur 6

Sidan AC i figur 6 blir en variabel för att maximera cirkelns area. Figuren kan ritas med samma resonemang som för den inskrivna cirkeln. Vi sätter $DC = x$. Eftersom triangeln ODC är kongruent med triangeln OEC är $CE = x$. $\triangle BCD$ är likformig med $\triangle BOE$ och därmed

$$r/x = (1-x)/\sqrt{(1-x)^2}.$$

Efter kvadrering blir $r^2 = x^2(1-x)/(1+x)$

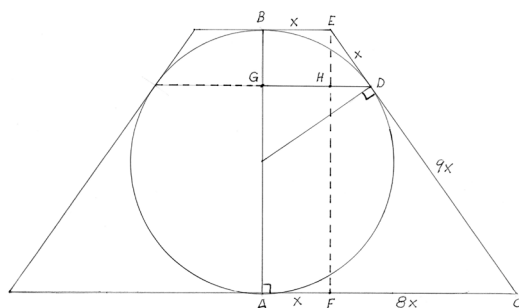
$$\text{och arean } y = \pi \cdot x^2 \cdot (1-x)/(1+x)$$

$dy/dx = \pi \cdot 2x(-x^2 - x + 1)/(1+x)^2 = 0$ ger y maximum för $x = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Arean blir maximal för $AC = \sqrt{5} - 1$.

2. Från realexamen 1950 nr 8, ingen figur ritad

Ett likbent parallelltrapets är omskrivet kring en cirkel med radien 6 cm. Den längre av de parallella sidorna är 9 gånger så lång som den kortare. De båda punkter, i vilka cirkeln tangerar de båda lika långa, icke parallella sidorna, sammanbinds. Beräkna längden av denna sammanbindningslinje.



Figur 7

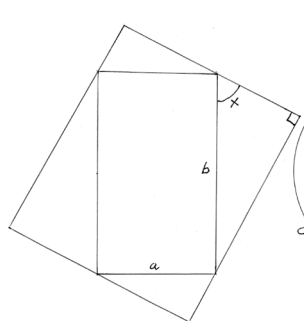
Trapetsen framgår av figur 7. Den kan inte ritas skalenligt utan beräkning, men principen för konstruktionen är viktig för att lösa uppgiften. Cirkeln ritas och två parallella linjer dras som tangenter till cirkeln i punkterna A och B. Därefter dras även en tangent från en punkt C (på lagom avstånd från A) till D och den förlängs till skärningspunkten E med tangenten genom B. Principen är densamma som i figur 3. Hjälpsträckan $EF = 12$ dras liksom halva kordan $GD = y$. Halva den kortare sidan x beräknas med Pythagoras

sats $(10x)^2 = 12^2 + (8x)^2 \Leftrightarrow x = 2$. $\triangle ECF$ är likformig med $\triangle EDH$ vilket ger att $HD/FC = ED/EC \Leftrightarrow (y-2)/16 = 2/20 \Leftrightarrow y = 3,6$ och hela sammanbindningslinjen = 7,2 cm.

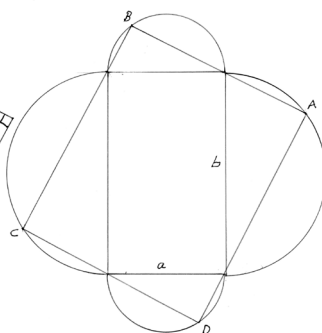
3. Tentamensuppgift envariabelanalys KTH 2012

Bestäm den största area man kan få av en rektangel som kan beskrivas så att varje sida går genom var sitt hörn av en annan rektangel med sidlängderna a och b .

Uppgiften gavs med figur 8A och den är tänkt som ett max/min-problem.



Figur 8A



Figur 8B

Man har med två vinkelsymboler tipsat om att bilda en trigonometrisk funktion. Eftersom de rätvinkliga triangelarna är likformiga och den lilla rektangeln är konstant räcker det att maximera triangeln med vinkeln x . Arealen $y = (b \sin x) \cdot (b \cos x) / 2 = b^2 \cdot (\sin 2x) / 4$. Omskrivningen till $\sin 2x$ gör att vi inte behöver derivera, $\sin 2x = 1$ för $x = \pi/4$.
Totala arean $= b^2/2 + a^2/2 + ab = \frac{1}{2} \cdot (a+b)^2$.

Figur 8B har ritats för att beskriva hur man kan konstruera den stora rektangeln. Konstruktionen går till på följande sätt: Dra en linje från A genom lilla rektangelns hörn till skärningspunkten B på nästa halvcirkel. Därefter fortsätter man på samma sätt. När vinkeln x varieras rör sig hörnen A, B, C och D utmed en halvcirkel. I triangeln med A som hörn är basen $= b$ och höjden varierar mellan 0 och cirkelns radie $= b/2$.

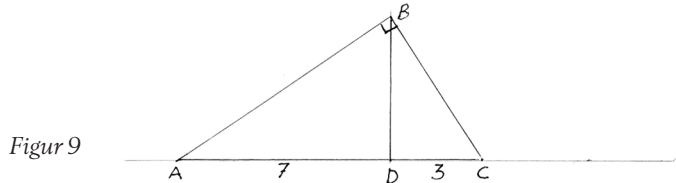
Den maximala arean, för triangeln med vinkeln x , blir $(\frac{1}{2}) \cdot (b^2)/2 = (b^2)/4$ och den totala arean $= \frac{1}{2} \cdot (a+b)^2$. Konstruktionen väcker idén till att uppgiften kan lösas med Euklidisk geometri!

Med eller utan figur ger olika lärande

Jag har pekat på att i de nationella proven ges oftast uppgifterna i geometri med en färdigritad figur ur vilken man direkt gör sin beräkning. Jag efterfrågar inslag av uppgifter som ges med en textbeskrivning av problemet och där eleven själv konstruerar en figur och väljer metod för lösningen. Jag förtydligar med några exempel baserade på en uppgift från NP 2c (NV och T) som gav 3 A-poäng.

Originaluppgift med färdigritad figur

Beräkna arean av den rätvinkliga triangeln ABC. Svara exakt.



Figur 9

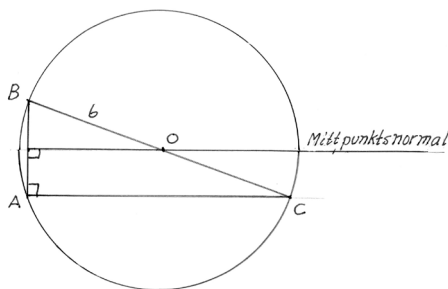
Lösning: Triangeln ABD är likformig med triangeln CDB. Vi antar att höjden mot AC är h . Likformigheten ger $h/3 = 7/h$ och därmed är $h = \sqrt{21}$ och arean $= 5 \cdot \sqrt{21}$.

Svårigheten i uppgiften är att identifiera likformigheten. Det lärande som äger rum och den utmaning eleverna ställs inför kan jämföras med följande två alternativ utan färdigritad figur.

Alternativ 1 utan färdigritad figur

I den rätvinkliga triangeln ABC har den ena kateten längden 4 och den omskrivna cirkels radie är 6. Beräkna triangelns area.

Lösning: Vi börjar med att rita $AB = 4$ och drar en stråle från A vinkelrät mot AB. Den omskrivna cirkels centrum ligger på ABs mittpunktsnormal. Med passaren i B markeras O där $BO = 6$. O blir cirkels centrum. Cirkeln ritas och den skär strålen från A i C. AC blir katet och $BC = 12$ blir hypotenusan.



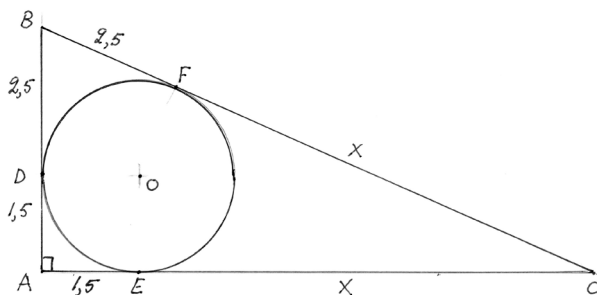
Figur 10

Konstruktionen stämmer med randvinkelsatsen som säger att för en omskriven rätvinklig triangel blir hypotenusan diameter i cirkeln. Enligt Pythagoras sats blir $AC^2 = 12^2 - 4^2 \Leftrightarrow AC = 8\sqrt{2}$ och arean blir $16\sqrt{2}$.

Alternativ 2 utan färdigritad figur

I den rätvinkliga triangeln ABC har den ena kateten längden 4 och den omskrivna cirkels radie är 1,5. Beräkna triangelns area.

Lösning: Precis som i föregående alternativ ritas $AB = 4$ först och en stråle dras från A. Tangeringspunkterna D och E markeras och cirkels medelpunkt bestäms med passaren i D respektive E med cirkels radie = 1,5. Tangeringspunkten F bestäms med passaren i B och radien = BD. Tangenten BF förlängs till skärningspunkten C med AE:s förlängning. Vi får då figur 11, där tangenterna $CE = CF = x$. Enligt Pythagoras sats blir $(x + 2,5)^2 = (x + 1,5)^2 + 16 \Leftrightarrow (x + 2,5)^2 - (x + 1,5)^2 = 16 \Leftrightarrow (2x + 4) \cdot 1 = 16 \Leftrightarrow x = 6$ och arean blir 15.



Figur 11

