

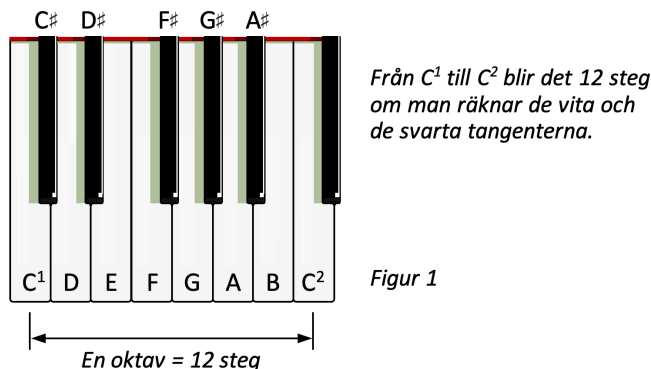
Va'tusan ska man med $Ca^{n/m}$ till?

När elever säger sig "fatta nada" kan det vara bra att både kunna ge konkreta exempel där matematiken spelar en viktig roll och att själv påminna sig om hur det känns när man inte riktigt hänger med och förstår ett innehåll. I artikeln är det kopplingar till musik som kan ge idéer om nyttan med matematik.

Det händer då och då att elever ger uttryck för tvivel om innehållet i en matematikkurs. Nyttan ifrågasätts. "Är detta något som jag någonsin kommer att behöva? Bråkräkning? Och all denna algebra! Va'tusan ska man med $Ca^{n/m}$ till?" I ett försök att tillmötesgå dessa tvivel, vänder vi oss till musiken.

Den rena tonen överges – kort om bakgrunden

Tonhöjden för en ljudande sträng avgörs av dess frekvens, det vill säga av antalet svängningar per sekund. Utan att gå för långt in i vare sig musikteori eller våglära kan vi här bara konstatera att en förflyttning tolv steg åt höger på ett piano, en så kallad *oktav*, innebär en fördubbling av frekvensen; se figur 1.



Fram till och med 1600-talet gällde, att om ett stränginstrument var stämt i säg tonarten D, så klingade alla toner rena i denna tonart. Men ville man spela ett stycke i en annan tonart blev klangen falsk här och var. Man var helt enkelt bunden till tonarten D.

Denna begränsning är av stor skada då man i nästan all musik vill kunna modulera runt bland tonarterna, som i exempelvis en sonatsats eller en jazzlåt. I frånvaro av sådana modulationer hade dessa musikstycken blivit ointressanta. Vi ser samma sak inom schlagermusiken: av tio låtar som tävlar gör kanske sju av dem en tonartshöjning inför den sista refrängen. Detta hade varit omöjligt med den gamla rena stämningen, och av detta skäl övergavs till slut den rena stämningen.

En geometrisk talföljd ska till

Att det smög sig in missljud på sina ställen berodde på att förhållandena mellan frekvenserna i den rena stämningen inte var enhetliga, det vill säga *kvoten var inte konstant*. Idén som infann sig under barockens epok, med bland annat *J S Bach* som en av de drivande, var att dessa falska klanger skulle fördelas jämnt över hela oktaven. Missljudet skulle alltså bli kvar men bli så litet på var ton att det knappt skulle höras, medan friheten att få vandra runt bland alla tänkbara tonarter skulle äntligen infinna sig.

Vi har konstaterat att en oktav fördubblar frekvensen, vilket ger sambandet $f[C^2] = 2 \cdot f[C^1]$ där f står för frekvensen. Vi utnyttjar detta och tar oss nedåt i skalan på jakt efter den konstanta kvoten k .

$2 \cdot f[C^1] = f[C^2] = (\text{se figur 1}) = k \cdot f[B] = k^2 \cdot f[A\#] = \dots = k^{12} \cdot f[C^1] \Rightarrow k^{12} = 2 \Rightarrow k = 2^{1/12}$
som alltså är vår sökta kvot.

Det vältempererade pianot

Tonen A i figur 1 ovan kallas för ettstrukna A och svänger 440 gånger/sekund, det vill säga $f[A] = 440 \text{ Hz}$, vilket vi nu kan skriva som $440 \cdot 2^{n/12}$ med $n = 0$ för denna ton. Men då ettstrukna A är den 49:e tangenten på ett piano, finns här möjlighet för eleverna att på ett naturligt sätt bekanta sig med en så kallad fasförskjutning. Resultatet blir en geometrisk talföljd anpassad till det *vältempererade pianot*.

$$a_n = 440 \cdot 2^{(n-49)/12} \quad n = 1, 2, 3 \dots 88$$

där n är tangentens placering och a den aktuella frekvensen. Några exempel:

$$a_6 = 440 \cdot 2^{-43/12} \approx 36,7 \text{ Hz}$$

$$a_{88} = 440 \cdot 2^{39/12} \approx 4186 \text{ Hz} \quad \text{Tangenten längst bort till höger.}$$

Vi kan konstatera att här finns gott om de vardagsexempel som efterfrågades ovan då alla talen är på formen $Ca^{n/m}$.

Några frågor i klassrummet:

1. Vilka tangenter på ett piano har en heltalsfrekvens?
2. Kvoten a_{n-12}/a_n får ett och samma värde för alla tänkbara värden på n . Vilket?
För den intresserade eleven: bevisa din iakttagelse.
3. Visa att talföljden a_n ovan kan skrivas $a_n \approx 27,5 \cdot 1,059463^{n-1}$
 $n = 1, 2, 3 \dots 88$

Ämnesöverskridande bråkräkning

Kanske skulle man i en grundskoleklass någon gång kunna bjuda in skolans musiklärare och med utgångspunkt i grundläggande musikteori försöka få lite liv i vanlig bråkräkning.

Musikens Elementa.

Hur lång tid en ton ska klinga har betydelse för musiken:

Helnot Halvnot fjärdedel åttondel sextondel

På matematiska: $\circ = \text{half note} = \text{quarter note} = \text{eighth note} = \text{sixteenth note}$

För att öka läsbarheten drar man ofta ihop noter med en balk som ersättning för vimplarna.

=

Med en punkterad not förlänger man den noten med dess halva tonlängd.

Om ett musikstycke går i till exempel tre fjärdedels takt, innebär det att det ska finnas exakt tre stycken fjärdedelar i varje takt. I nottexten nedan står takten angiven till vänster: 3/4.

En takt

Hej tomte - gubbar slå i glaset och låt oss lus-ti-ga va - ra.

En mellanstadieklass till exempel skulle här kunna få fastställa om detta stämmer: är det verkligen 3/4 i den första takten?

Vi bortser från tonhöjden och koncentrerar oss på takten och utgår från tre stycken renodlade fjärdedelar. Därifrån ska eleverna sen ta sig till första takten i visan ovan. De kommer bland annat att ställas inför frågan vad hälften av 1/8 är.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{4} + \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{16} \right] + \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{16} \right] = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Ja, *Hej tomtegubbar* går i tre fjärdels takt. Den sista symbolen i notskriften ovan är ett paustecken. Hur lång är den pausen uttryckt som en andel av takten?

Kontrapunkt och matematik – vissa analogier

Om vi återvänder till barocken kan vi notera att under denna epok var *fugan* en vanlig musikform. En fuga byggs upp av ett antal självständiga stämmor, och i denna *polyfoni* återkommer alltid vissa så kallade *kontrapunktiska* tekniker. Några av dem är följande:

<i>Omvändning:</i>	En given melodi vänds upp och ner.
<i>Kräftgång:</i>	Melodin läses baklänges.
<i>Omvänd kräftgång:</i>	Omvändning och kräftgång samtidigt.

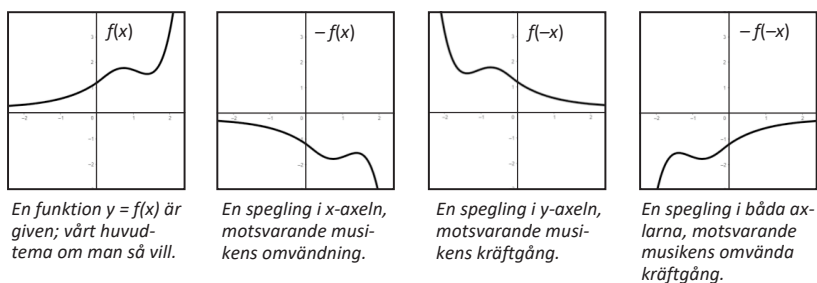
Huvudtema 

Omvändning 

Kräftgång 

Omvänd kräftgång 

Figuren ovan visar ett exempel. Men omvändningen är ju egentligen inget annat än en spegling i en tänkt x -axel. Och kräftgången likaså; en spegling i en y -axel. Redan i de lägre matematikkurserna tar vi upp sådant här, det vill säga kurvor som speglas, roteras och liknande. Om vi inte drar alltför stora växlar på detta, kan vi tillåta oss att uppfatta dessa kompositionsidéer som musikaliska analogier till bildsviten nedan hämtad från matematiken.



Då en graf speglas i x -axeln förflyttas inte de punkter som ligger på x -axeln. Så vilken linje eller vilket mellanrum utgör speglingsaxel i omvändningen i andra notexemplet ovan?

Matematikångest – går det att förnimma?

Många av oss har nog emellanåt i tysthet undrat vad det är som är så svårt med något så elementärt som exempelvis våra potenslagar. Här skulle kunna vara platsen för lite praktiska tips i frågan. Men det ger vi oss inte in på. Istället ska vi göra ett försök att sätta oss in i den känsla av olust som inte sällan uppfyller en matematiktrött elev. Hur känns det att inte förstå? Att känna sig dum. För att få en genuin upplevelse av detta obehag, får vi betrakta något annat än algebra, då detta är ett område där vi matematiklärare känner oss trygga.

Notskrift och algebra är inte samma sak, men de två ”språken” har ändå något gemensamt: båda utgör abstrakta formuleringar av mänskliga tankar. Kanske följande övningar kan bidra till någon form av inlevelse i den frustration många elever känner.

Nedan har vi fem notskrifter från välkända barnvisor. Vi befinner oss alltså på en mycket låg nivå, typ Mal. För den intresserade kollegan: para ihop notskrift med tillhörande titel utan att använda något instrument.

1. Bä, bä vita lamm

