

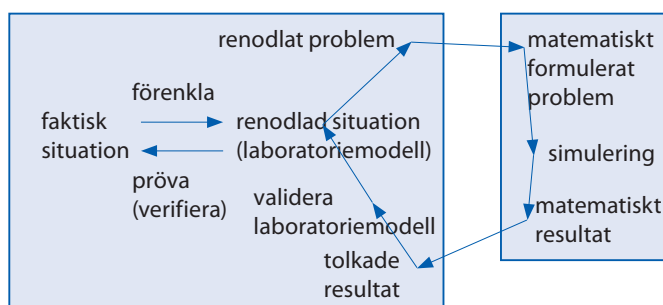
Etiskt medveten problemformulering

I artikeln ges några exempel på matematisk modellering som anknyter till definitioner i TIMSS och PISA. Några sammanhang som PISA har kategoriserat när de gör uppgifter är arbetsliv, naturvetenskap, samhälle och personligt.

Det finns en gammal berättelse som går ungefär så här: En elev kände sig omotiverad och frågade läraren "Vad ska man egentligen ha matematik till?". Läraren hade kanske gjort värnplikten som artillerist och svarade "matematik behövs exempelvis för att beräkna projektilbanor när man skjuter med kanoner". Eleven svarade "nu vill jag verkligen inte lära mig matematik eftersom pappa skadades svårt i kriget". Det finns många uppfattningar om matematik och en av dem är att matematik är ett värde-neutralt ämne. Kanske är så kallat nakna övningar det, men när vi tillämpar matematiken i många sammanhang så behöver den inte alls vara värde-neutral. Denna artikel ger några exempel på det.

Fyra aspekter på matematisk modellering

Figuren nedan används ofta för att illustrera vad matematisk modellering är. Originalet finns i artikeln *Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?* I matematisk modellering behövs flera sorters kunskap. Kunskap om sammanhanget – den faktiska situationen är viktig.



En skojig illustration av detta berättas vid Linköpings universitet. En person simulerade en matematisk modell för att planera timmeravverkning. Simulering av modellen gav resultatet att när skogsarbetarna hade tid över, så skulle de kvista och barka träden medan man skulle hugga ned och frakta ut dem när pappersfabrikerna och sågverken behövde virket. Det behövdes inte

särskilt mycket kunskap om skogsvård för att inse att personen hade glömt att i simuleringsmodellen stoppa in villkoret att man först måste hugga ned träden innan man kan kvista och barka dem.

För att bygga en matematisk modell behöver man förstås även ämneskunskaper, exempelvis om ekvationer och grafer, som är användbara i många sammanhang. För att åstadkomma resultat behöver man också kunskaper om hur man med resonemang kan koppla samman olika matematiska kunskaper. Tabellen nedan sammanfattar dessa tre aspekter, vilka förekommer i flera ramverk för vad god undervisning i matematik ska innehålla. Tabellen lägger till en fjärde aspekt: etik, som i en del matematiska modeller blir en aspekt som rimligen inte går att bortse ifrån. Ole Skovsmose ägnar en stor del åt detta i boken *Critical mathematics education* där roten för det grekiska ordet "kritisk" i professionella sammanhang har betydelseerna domare, bedöma och recension, alltså att omdömesfullt granska något.

Aspekt	Lgr 22	TIMSS	PISA
Ämneskunskap	Centralt innehåll	Content domain	Content knowledge
Åstadkomma resultat	Förmågor	Cognitive domain	Reasoning and problem-solving processes
Sammanhang	Elevnära situationer	–	Context
Etik	–	–	–

Resten av denna artikel tar upp några exempel från olika sammanhang och sorterar dem enligt den indelning som finns i PISA, nämligen de fyra sammanhangen arbetsliv, naturvetenskap, personligt och samhälle. Det är i dessa sammanhang som PISA formulerar sina provuppgifter. Indelningen är förstås inte heltäckande, men kan tjäna som inspiration och ge en god spridning i valet av sammanhang. Det speglar även OECD:s syfte med att vara en organisation för ekonomiskt samarbete och utveckling, nämligen OECD:s syn på sammanhang som är viktiga för att fungera väl som samhällsmedborgare. I denna artikel väljs tillämpningarna för att lyfta fram vårt eget ansvar för samtiden och framtiden.

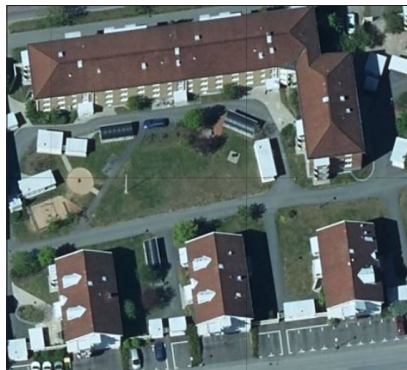
Sammanhanget *arbetsliv*: Bygga och vårda

PISA beskriver sammanhanget *arbetsliv* som administrativt arbete med pengar och planering samt mätsituationer i exempelvis vård och husbyggen. Flera nyhetsinslag under året har berättat att man i tätorter behöver dels gröna ytor för att minska effekten av värmeböljor dels mjuka ytor för att minska effekten av skyfall då sådant redan verkar ha blivit vanligare på grund av en stigande koldioxidhalt i atmosfären. Mjuka ytor som grus och gräs absorberar vatten vid regn. Gröna ytor avdunstar vatten och till detta går det åt värme och har därför samma kylande effekt som att svettas. Hårda ytor saknar denna egenskap och bidrar till en het omgivning. Jämför att en solig sommardag gå barfota på gräs respektive på asfalt eller på en sandstrand. Detta exempel tar upp en skolmatematisk tillämpning i geometri och visar hur den didaktiskt kan byggas ut med laborativa inslag. Samtidigt är tillämpningen vald för att påminna oss om en klimatutmaning (NO) och visa hur den kan mildras med god samhällsplanering (SO). Det etiska i detta är att ta ansvar och det är en utmaning att göra något åt den.

Mjuka och hårda ytor

Låt det bli en projektuppgift för elever att hämta en satellitbild på sin närmiljö, exempelvis sin egen gata, och beräkna ytan eller andelen gröna respektive mjuka ytor. Detta går att göra på flera sätt. En del kartverktyg kan direkt räkna ut arean i verkliga kvadratmeter av ett markerat område. En annan möjlighet är att stoppa in en bild i Geogebra och där mäta bildens area i cm^2 . Det är också möjligt att i kartverktyget markera en sträcka på 20 meter och använda den för att bestämma längdskala respektive areaskala. Skolor behövs däremot inte om man vill beräkna andelen gröna eller mjuka ytor.

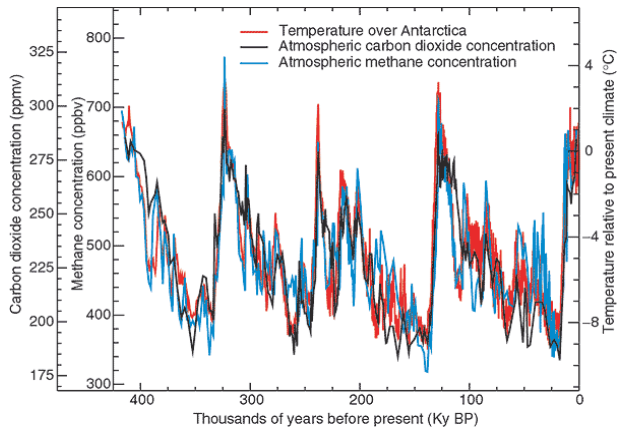
Ytterligare en möjlighet är att på följande sätt simulera effekten av hårda respektive mjuka ytor vid skyfall. För att simulera regn på hårda ytor: mät upp $\frac{1}{2}$ dl vatten och håll det i lagom takt över en lutande skärbräda. En annan person mäter tiden för att hålla ut allt vattnet och en tredje person mäter tiden som vattnet rinner över nederkanten på skärbrädan. För att simulera regn på mjuka ytor, lägg en fuktig men urkramad disktrasa på skärbrädan och gör samma mätningar igen. Beräkna sedan de båda flödeshastigheterna ml/s vid nederkanten på skärbrädan och beräkna sedan hur många procent större flöde som den hårda ytan gav vid denna simulering. Genom att mjuka ytor absorberar delar av regnet så kanske man slipper översvämmande gatubrunnar längre ned på gatan.



Sammanhanget *naturvetenskap*: Oroväckande lutningar

PISA beskriver sammanhanget *naturvetenskap* som matematiska tillämpningar inom biologi, klimat, teknik med mera. Ett exempel på detta är att data från SMHI erbjuder en tankeväckande övning. Genom att i borrhälsdata från inlandsisar jämföra andelen vattenmolekyler som har den tunga syreisotopen ^{18}O (med 10 neutroner) med den vanliga isotopen ^{16}O , som i kallt väder avdunstar något lättare och därmed är vanligare i snö från kalla perioder, så går det att återskapa historiska temperaturserier mycket långt tillbaka. Figur 2.22 i kapitel 2 i klimatrappporten från IPCC (*Intergovernmental Panel of Climate Change*) har på detta sätt rekonstruerat temperaturer i Antarktis för de senaste $\frac{1}{2}$ -miljon åren enligt diagrammet på nästa sida (<https://www.ipcc.ch/report/ar3/wg1/>). Gör nu följande övning: Välj en period av snabb temperaturökning i diagrammet (röd kurva) och beräkna vilken temperaturförändring per århundrade detta motsvarar.

Ur diagrammet går det att ungefärligen avläsa att de branta temperaturökningarna har varit cirka 10°C under perioden 330 000–320 000 år sedan vilket ger ungefär $0,1^\circ\text{C}$ per århundrade. Nästa övning blir att låta eleverna med en sökning leta reda på aktuella temperaturförändringar och konstatera att denna snabba temperaturökning på $0,1^\circ\text{C}$ per århundrade är ungefär lika stor som vad dagens högstadiel elever har varit med om under sin skoltid!



Diagrammet visar temperatur jämfört med nu (rött) och att dessa samvarierar med halterna av metan (blått) och koldioxid (svart). Det kan vara värt att påminna om att koldioxidhalten nu ligger på drygt 400 ppm (parts per million), vilket är långt ovanför diagrammets axel. Därmed kan vi förvänta oss ytterligare temperaturökningar. Ett exempel från biologin på ett etiskt utmanande resultat är den enkla modell för balans mellan arters utrotning och nybildning i Nämnarenartikeln *Matematisk modellering för miljöarbetet* där modellen, tillsammans med ett laborativt inslag i form av en datasökning, påvisar en biologiskt ohållbar och historiskt mycket hög takt för artutrotningen.

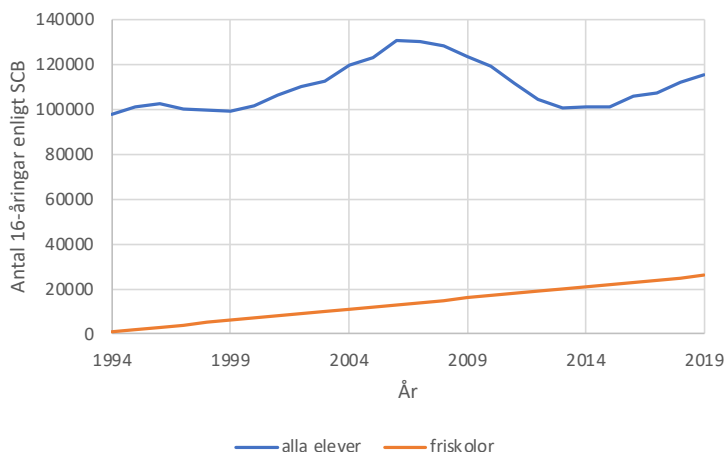
Sammanhanget *personlig*: Privatekonomi och transport

PISA beskriver sammanhanget *personlig* som mat, transport, rekreation, privatekonomi och annat som kan ha med familj och kompisar att göra. Ovan nämnda artikel om matematisk modellering tar upp sammanhangen transporter och privatekonomi och finner att det med två enkla modeller går att visa att för korta avstånd, exempelvis elevens egen skolväg och föräldrars väg till arbetet och butiken, så är cykel både billigare och snabbare än bil. Att denna modell är långt från värdeneutral kan illustreras med ytterligare en modell i samma artikel som belyser innebörden av "sänkt pris vid pump" (på fossilt fordonsbränsle), som förordades i valdebatten 2022. En enkel modell, som är miljömässigt och etiskt mer ansvarig mot kommande generationer, är att istället fokusera de samhällsekonomiskt nödvändiga arbetsresorna genom större avdrag för just arbetsresor för dem som inte har något rimligt alternativ till bil. En sådan modell ger fritidsresor varken sänkt skatt eller möjlighet till avdrag på deklarationen. Kanske en sådan modell kan fungera även för flygskatt?

Ett etiskt medvetet val av övningar i matematik är att välja att modellera transportkostnader respektive generellt sänkt bränslepris eller avdrag för jobbresor. Ett annat etiskt medvetet val är hur resultatet redovisas, vilket Magnus Ödmo, Anna Chronak och Lisa Björklund Boistrup problematiserar genom att låta lärarstudenter jämföra några diagram om koldioxidutsläpp. Beroende på om diagrammen visar utsläppen per capita eller per land årligt respektive kumulativt, så inbjuder diagrammen till mycket olika tolkningar. Exempelvis har Indien lägre koldioxidutsläpp per capita och kumulativt än Storbritannien medan det årliga utsläppet per land är högre i Indien än Storbritannien.

Sammanhanget *samhälle*: När överkapacitet behövs

PISA beskriver sammanhanget *samhälle* som det som angår samhället i stort: opinionsundersökningar, kollektivtrafik, demografi, folkhälsa, reklam och underhållning. Följande exempel tar upp att många verksamheter i samhälle och näringsliv har ett behov av överkapacitet för att klara arbetstoppar. En teknisk term för detta är redundans. Exempelvis behövs redundans hos vägar, elnät, sjukhus och brandförsvär. Nämnarenartikeln *Modellering av elproduktion* ger en sådan modell för att beskriva volatilitet på energipriser. Här tar vi upp volatiliteten i antalet elever som exempel på skolans behov av överkapacitet.



Statistik från SCB visar att det 2007 fanns drygt 130 000 16-åringar men 2013 knappt 101 000, vilket motsvarar 22 procent färre på sex år. För åskådlighe- tens skull kan vi tänka oss en gymnasieklass som 2007 hade 32 elever, alltså en full klass – 100 procents kapacitetsutnyttjande. Samma klass skulle 2013 ha 25 elever – endast 78 procents kapacitetsutnyttjande med ett genom- snitt på 89 procent över tid grovt räknat. Detta kan jämföras med vinstdri- vande friskolor, vilka eftersträvar att ha fulla klasser och därmed använda sina resurser i form av lärare och lokaler till 100 procent oavsett demogra- fin. Ett minskat söktryck till friskolor leder vanligen endast till sänkt antag- ningspoäng eller kortare kö.

Vi gör nu ett tankeexperiment. Låt friskolorna ha 20 000 av en årskull, vilket det ungefärligen var åren 2007–2013 (ekonomifakta.se). De kommunala skolorna måste då kunna hantera variationer mellan 110 000 elever år 2007 och 81 000 år 2013 och i procent blir tappet från 100 till 74 procent och ett genomsnitt över tid på 87 procent. Dessa beräkningar illustrerar två saker. För det första måste skolor med lagstadgat ansvar för demografiska varia- tioner per definition ha överkapacitet och det kostar pengar. För det andra, ju större andel elever i friskola, desto större måste den kommunala skolans överkapacitet vara medan en friskola kan korta kön, hitta billigare lokaler eller i värsta fall gå i konkurs, som John Bauergymnasiet.

Enligt lag måste en kommunal skola ha reserver för demografiska varia- tioner beroende på babyboom, urbanisering, migration och barn till föräldrar som får nytt jobb på annan ort. Dessa elever kan inte vänta ett par månader eller år tills det finns plats på den nya bostadsorten. Volatiliteten i antalet

elever ger alltså kommunala skolor en extra kostnad. Omvänt så har friskolor inte denna kostnad. De friskolor som vill gå med vinst ser därför till att etablera sig i områden där de kan räkna med att ha fulla klassrum. I exemplet ovan kan sådana skolor per automatik tjäna cirka 13 procent på att inte ta ansvar för volatiliteten. Detta väcker etiska frågor: Vore det inte mer rättvist att ge friskolor en lägre skolpeng så länge de inte har samma skyldighet som kommunala skolor har att ha överkapacitet för demografisk volatilitet?

En sådan modell skulle kanske också lösa politiskt polariserade läsningar som bygger på ideologier om valfrihet kontra vinstförbud. Dessutom är vinstförbud knepigt av två skäl. Dels kan vinst i en skola gömmas i högre lokalkostnader där lokalerna kanske ägs av samma koncern som äger skolan. Dels har även kommunala skolor betydande inslag av vinstdrivande privat näringsliv för att bygga och underhålla skolbyggnaden, samt producera och transportera skolmat och läromedel.

Etik, engagemang och episodiska minnen

Ett resultat från minnesforskning är att engagemang kan skapa minnen som varar längre, ett annat resultat är att jämfört med semantiska minnen så varar episodiska minnen längre. Kanhända etiska aspekter kan vara ett sätt att skapa engagemang vid matematiklärandet och att dessa upplevelser får formen av episodiska minnen genom att välja ett lokalt sammanhang med lämpliga inslag av laborativa inslag och att detta på köpet främjar matematiska minnen? Det borde vara värt att pröva. Det händer säkert att en del etiskt medvetna val av övningsproblem kan skapa polarisering i klassen. Samtidigt erbjuder matematiken ibland argument för att bryta polariseringen i exempelvis debatten om bränslepriser, friskolors vinster, kärnkraft eller vindkraft genom att visa att detta borde i mindre utsträckning vara en fråga om ideologisk polarisering och mer en fråga om driftsekonomi och ansvar för samtid och framtid.

För att avrunda: Det går bra att låta sig inspireras av nyhetsflödet och aktuella samhällsutmaningar för att skapa etiskt medvetna och samtidigt elevnära problemformuleringar, som ibland kan byggas ut till miniprojekt, gärna med inslag av laborativa moment och kanske lokal geografisk anknytning.

LITTERATUR

- Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45–58.
- Petersson, J. (2022). *Matematisk modellering för miljöarbetet*. Nämnaren 2022:4.
- Petersson, J. (2023). *Modellering av elproduktion*. Nämnaren 2023:2.
- Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer.
- Ödmo, M., Chronaki, A. & Bjorklund Boistrup, L. (2023). Bringing critical mathematics education and actor – Network theory to a statistics course i Mathematics teacher education: Actants for articulating complexity i *Student Teachers' Foregrounds. Education Sciences*, 13(12), 1201–1201.