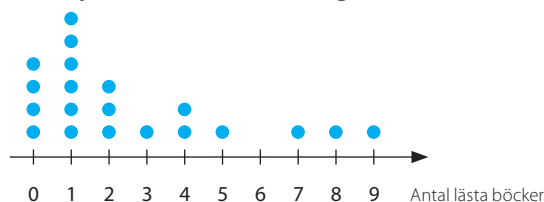


Punkter som visar både läge och spridning

Unga elevers första möte med diagram är ofta i form av staplar som exempelvis kulor på snören som visar hur många tänder de har tappat. Genom att föra in punktdiagram kan eleverna genom samtal få börja bekanta sig med statistiska begrepp som lägesmått och variationsbredd.

Punktdiagram är lämpliga att starta med i statistikundervisningen för yngre elever. Benämningen kan dock kräva viss förklaring. I engelskspråkig litteratur används 'dot plot' eller 'pictogram' för samma slags diagram. Söker vi på det svenska ordet punktdiagram handlar träffarna oftast om korrelationer, samband mellan variabler, och i läroböcker förekommer de då på gymnasiet. En anledning till att vi började diskutera punktdiagram så som vi beskriver dem i artikeln, beror på att vi kom i kontakt med dem dels i läromedel som hade översatts från engelskan, dels i uppgifter i TIMSS som ganska många svenska elever möter de år då undersökningen genomförs. Om man använder punkter, sätter kryss, använder andra symboler eller kanske till och med ett foto på varje deltagande elev, har mindre betydelse. Sammanhanget kan få avgöra. Det väsentliga är att det går att avläsa lägesmått och föra diskussioner utan att eleverna behöver ha förståelse för avläsning av två axlar som är det vanligaste i andra förekommande diagram.

I de svenska styrdokumenterna finns också stöd för användning av punktdiagram. Under Centralt innehåll, Sannolikhet och statistik för årskurs 1–3 står det: *Enkla tabeller och diagram och hur de kan användas för att sortera data och beskriva resultat från enkla undersökningar.*



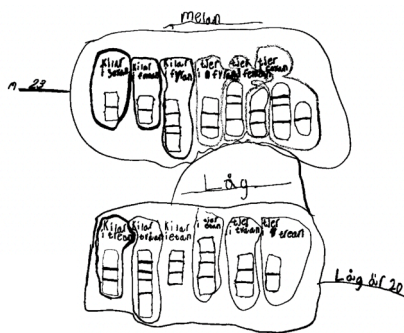
Figur 1. Punktdiagram som visar hur många böcker eleverna i en klass har läst under sommaren.

Diagrammet i figur 1 beskrivs lite längre fram i texten. Vi börjar med en beskrivning av vad som är specifikt för ett punktdiagram samt hur denna konstruktion möter elevers intuitiva sätt att rita diagram. Ett punktdiagram är en statistisk sammanställning av data på en relativt enkel skala.

Ofta används fyllda cirklar (punkter) för att markera observationer på skalan. En fördel är att varje punkt är lika med en observation. Eleverna kan identifiera sitt eget värde i diagrammet, till exempel att "punkten på tre lästa böcker är min punkt för jag var den enda som hade läst tre böcker".

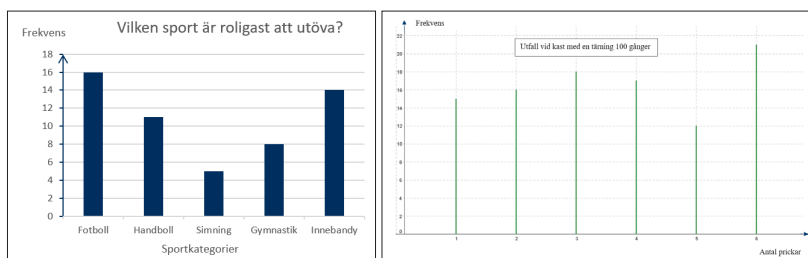
Denna beskrivning stämmer väl överens med hur yngre elever ritar diagram, figur 2. Lisbeth Åberg-Bengtsson benämner detta som att eleverna konstruerar diagram där de uttrycker sig i förhållandet ett till ett, där alla enheter (punkter i ett punktdiagram) motsvarar hur många som har deltagit i undersökningen och placeringen motsvarar punktens värde. Vid avläsning av ett punktdiagram räknar man hur många punkter det är vid varje värde.

Något annat som Åberg-Bengtsson uppmärksammar när elever ritar egna diagram är att de i början inte tänker på att placera sina enheter på en gemensam referenslinje och att enheterna de ritar inte är lika stora. Detta medför att höjden inte blir avläsbar, vilket på sikt är ett mål i undervisningen. För att möta detta bör eleverna inledningsvis få arbeta med konkret material, exempelvis klossar, som är enhetliga och går att stapla.



Figur 2. Exempel från Åberg-Bengtsson på elevritade diagram med olika stora enheter och där en gemensam referenslinje saknas.

Punktdiagrammet stämmer med elevens intuitiva sätt att rita ett diagram. Eftersom elever ofta ritar diagram på det viset ökar deras möjlighet att förstå punktdiagrammets uppbyggnad. Om vi jämför elevdiagrammen i figur 2 med punktdiagrammet i figur 1 ser vi att punktdiagrammet har den referenslinje, x-axel, som eleverna inte alltid själva uppmärksammar, och ännu behöver de inte ha förståelse för koordinatsystem med två axlar. Det vi som lärare behöver hjälpa till med i punktdiagrammet är att punkterna (eller om vi ritar kryss eller exempelvis sätter små post-it-lappar) har så lika storlek som möjligt eftersom punktdiagrammet på sikt kommer att utvecklas till stapeldiagram eller stolpdigram, beroende på vilken variabel som undersöks.

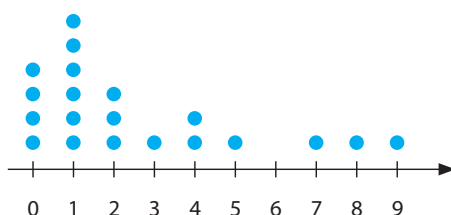


Figur 3. Exempel på stapel- och stolpdigram.

I båda diagrammen i figur 3 har variabeln avsatts på x -axeln och frekvensen på y -axeln. I ett stapeldiagram sätts kategorierna ut på x -axeln och frekvensen för varje kategori kan avläsas på y -axeln. Principen för ett stolpdigram är densamma. Skillnaden är att stolpdigrammet har streck som liknar stolpar istället för breda staplar. Skälet är att anpassa diagramkonstruktionen till variabler som ger kvantitativa och diskreta värden. Stolpen landar i en specifik punkt på en tallinje. I båda dessa diagram ser vi att en-till-en-presentationen är borta och alla mätvärden finns i stapeln eller stolpen. Frekvensen läses av utifrån frekvens på y -axeln som därför kan liknas vid en linjal att mäta höjden med.

Undersökning av antal lästa böcker

Tillbaka till punktdiagrammet i figur 1. I undersökningen är variabeln *Antal lästa böcker*. Figuren visar att fyra elever har läst noll böcker under sommaren, sex elever har läst en bok, och så vidare. Punkterna ger oss därmed möjlighet att beräkna olika lägesmått, de mått som hjälper oss att säga något om värdenas läge. Vi börjar med *typvärde*, det eller de värden som har



högst frekvens. Eleverna kan tydligt se att flest av dem bara har läst en bok. Det går att räkna punkter men också se att höjden är högst för värde = 1. För *medianen* kan vi räkna oss in till mitten eftersom punkterna är markerade på en skala där värdena är storleksordnade. Den visade datamängden består av 20 olika punkter vilket innebär att vi letar efter punkt tio och elva. Dessa har värdena 1 och 2 vilket ger en median = 1,5. Slutligen *medelvärde*. Summerar vi antalet böcker som eleverna har läst tillsammans får vi 52 böcker. Delar vi sedan 52 på 20 får vi fram att medelvärdet för antal lästa böcker i denna klass är 2,6 böcker per elev. Eftersom det är mer stimulerande och utmanande för elever att göra egna liknande undersökningar än att få tillrättalagda sifferuppgifter, kan resultaten bli decimaltal som de ännu inte är bekanta med. Medelvärdet av något som från början var heltal kan genom divisionen ge ett rationellt tal. Denna matematiska egenskap är abstrakt och behöver så småningom hanteras genom undervisning.

Att införa variationsbredd

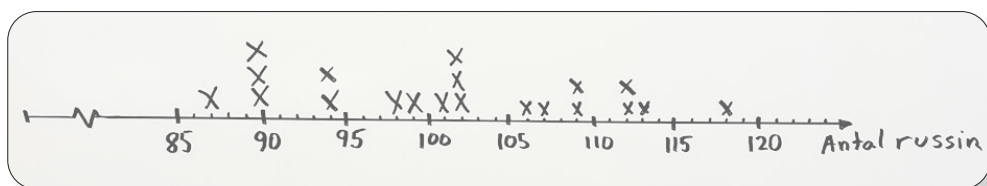
Vid arbete med punktdiagram går det även att införa spridningsmåttet *variationsbredd* för att beskriva värdenas spridning. Värdena i undersökningen i figur 1 är heltal mellan 0 och 9, och variationsbredden (max-värde minus min-värde) för denna klass är 9. Detta mått kan användas för att jämföra resultat från flera olika undersökningar. Om vi till exempel undersöker hur många böcker två parallellklasser har läst kanske vi får variationsbredden 5 respektive 9. Variationsbredden 5 kan vi till exempel få om högsta antalet lästa böcker är 10 och lägsta är 5. För den andra klassen med variationsbredden 9 kanske maxvärdet är 14 och minvärdet 5. Spridningsmåttet säger alltså inte något om hur många böcker eleverna har läst. Tillsammans ger variationsbredd och lägesmått ett sätt att diskutera och jämföra olika mängder av data.



Räkna russin – ett undervisningsexempel

Konstruktionen av punktdiagram medför att datamängden inte får vara allt för omfattande. I skolsammanhang är en undersökning på klassnivå lämpligt då det ger tillräcklig data. Man kan gärna genomföra samma undersökning i två klasser och därmed få två punktdiagram som kan jämföras. Undersökningen kan bygga på en gemensam aktivitet i klassrummet. Ett förslag är att räkna antal russin i ett antal askar av samma märke och storlek. Runt 20 askar är en lagom mängd. Eleverna räknar russin per ask och sätter sedan en punkt, eller som i detta fall ett kryss, för antalet russin i varje ask på en tallinje på tavlan.

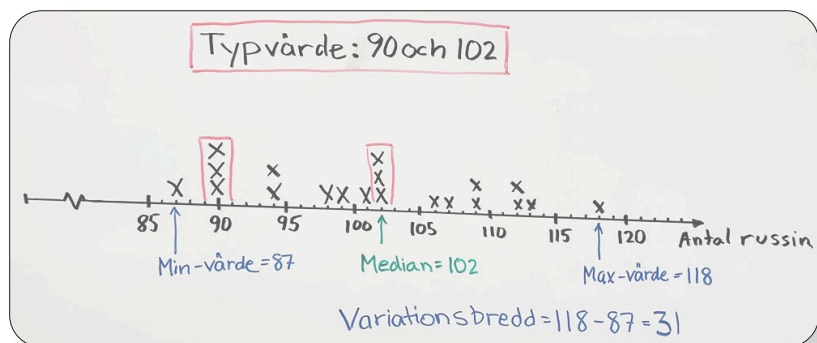
När man vet att värdena kommer att vara ganska samlade långt från noll kan det vara lämpligt att visa hur man "sågar" x -axeln för att anpassa den till de värden som kommer att vara aktuella. Arbetar man på tavlan är det lätt att markera eventuella typvärden (i detta exempel blev det två typvärden) och medianen. Vi kan också markera max- och minvärden för att åskådliggöra variationsbredden. Om medelvärde beräknas beror på årskurs.



Figur 4. Värden för 20 askar har prickats in.

Att rita en bild över statistisk data är precis vad vi använder diagram till och i det här fallet ger punktdiagrammet en åskådlig bild över hur antalet russin har fördelats. Nu är det möjligt att diskutera följdfrågor av olika slag. Vi kan ställa frågor som bygger på *en avläsning*: "Hur många russin hade den ask som hade flest?" eller "Hur många askar hade 90 russin?". Vi kan ställa frågor som bygger på *avläsning och beräkning*: "Vilken är variationsbredden, skillnaden mellan högsta och lägsta antal russin?" eller "Hur många askar hade färre än 102 russin?". Frågorna kan bygga på den data vi har samlat in för att exempelvis *förutspå en trend*: "Om vi öppnar en ask russin till, hur många russin kommer den att innehålla?". Slutligen kan frågor bygga på en *kritisk granskning*. Då handlar inte frågorna om den specifika data som har presenterats utan något annat med koppling till den kontext som data har tagits från, det kan ge frågor av karaktären: "Ge två olika orsaker till att denna storlek på ask har valts. Vilka skäl kan det finnas för att tillverka större askar?" Denna nivå av frågeställningar kan också beröra om det presenterade diagrammet är lämpligt för denna data, eller om det finns en annan typ av diagram som vore mer lämpligt. Även frågor om *dataunderlagets storlek* kan vara en infallsvinkel för frågor: "Är undersökningen tillräckligt omfattande för att säga något om antal russin per ask?"

En fortsättning på denna aktivitet är att undersöka vilka lägesmått som går att utläsa av diagrammet. Typvärde går att identifiera utifrån de värden som har flest kryss. Medianen kan räknas fram genom att identifiera de mittersta kryssen. Tillsammans med variationsbredden får vi både lägesmått och ett spridningsmått att resonera om resultatet utifrån. Dessa värden visas i figur 5.



Figur 5. Olika lägesmått och spridningsmått som underlag för diskussion.

Lägesmåten och variationsbredden i denna övning kopplar till ett specifikt ämnesinnehåll. Vi får inte bara att typvärdet är 90 och 102, utan dessa två typvärden kan kopplas till vissa av russinaskarna. Det blir tydligare för eleverna att *det verkar som att många askar har den mängden russin i sig*. Ett sådant resonemang kan utvecklas genom att man diskuterar storleken på undersökningen, 20 askar utgör ett litet omfång av data. Man kan få anledning att fundera på vad som händer om vi undersöker 100 askar, eller 1000 askar. Vi för då en diskussion om russin utifrån talen 90 och 102, men inte enbart som "bara" tal, utan värdet på en verklig situation beskriven utifrån statistik, som är ett ämne där man beskriver siffror med koppling till en verklighet. Samma resonemang kan föras gällande medianen. Denna mindre undersökning visar att hälften av askarna har färre än 102 russin och hälften av askarna har fler. Många elever tror att medianen är ett tal som visar mitten, men sedan släpper ofta deras förståelse då de saknar reella exempel där det har fått resonera om data utifrån en verklig situation som de förstår.

Om vi dessutom undersöker antalet i askar med russin i samma storlek av ett annat fabrikat så får vi ytterligare ett punktdiagram. Helt plötsligt får vi en möjlighet att jämföra två datauppsättningar där vi i våra jämförelser kan använda oss av lägesmått och variationsbredd. Beroende på årskurs kan man utifrån denna undersökning fortsätta och visa fördelningen av antal russin i ett lådagram, men det får vi återkomma till i en annan artikel.

LITTERATUR

- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for research in mathematics education*, 18(5), 382–393.
- Landgren, L. (2023). *Meningsfull statistik*. Nämnaren 2023:1.
- Leavy, A. & Hourigan, M. (2016). Crime scenes and mystery players! Using driving questions to support the development of statistical literacy. *Teaching Statistics*, 38(1), 29–35.
- Åberg-Bengtsson, L. (1999). *Att bygga, rita och tolka stapeldiagram*. Nämnaren 1999:2.

På www.khanacademy.org finns tydliga beskrivningar av punktdiagram, hur de konstrueras och vad som är fördelarna med dem. Sök på dot plots.