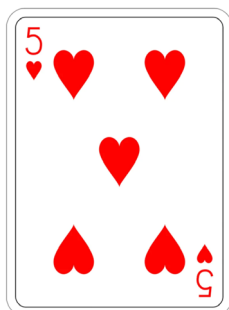
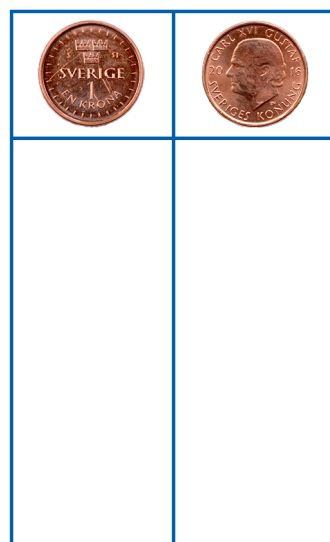
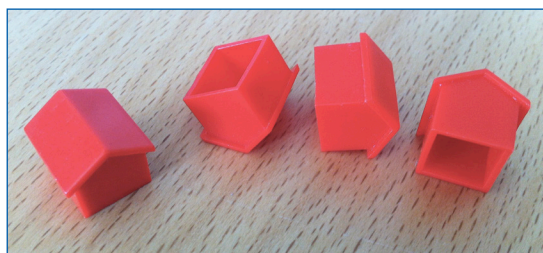


Statistik och sannolikhet

Elevers dokumentation

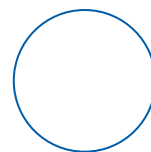
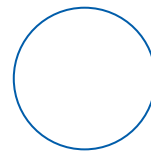
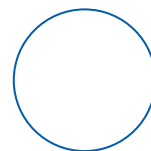
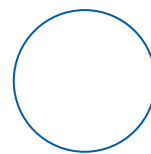
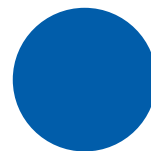
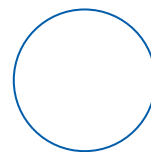
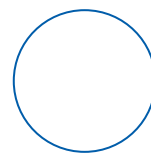
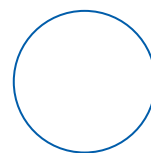


Ämnesområde: Kan det hända?

Årskurs 1–3: Vad kan hända?

Årskurs 4–6: Kasta mynt

Årskurs 7–9: Kast med två tärningar



Statistik och sannolikhet

Statistik och sannolikhet utgör en relativt modern del av matematiken. Statistik som vetenskap uppkom under 1600- och 1700-talet. Till en början var statistik en samhällsvetenskaplig disciplin, där matematiska beräkningar användes för att kartlägga och förutsäga befolkningens storlek och demografi, i första hand för att administrera och beskatta befolkningen. Under 1700-talet började statistik användas inom medicin för att kartlägga sjukdomar och smittspridning. Så småningom kom statistiken att utveckla nya matematiska metoder och inleddes i matematikämnet såväl på universiteten som i skolorna. Statistiken kan ha tre olika syften – beskrivande (deskriptiv statistik), förklarande (orsakssamband) eller framåtblickande (förutsägelser).

Sannolikhetslära har sina rötter i spel och lekar, där chansen att vinna och risken att förlora i alla tider har utgjort underlag för vadslagning. Ett klassiskt sannolikhetsproblem är att beräkna sannolikheten för olika utfall vid tärningskast. Sannolikhetsläran är även en fundamental byggesten i utvecklingen av artificiell intelligens. I modern tid har sannolikhetslära och statistik kombinerats för att skapa komplexa beräkningsmodeller som förutsäger alltifrån väder till aktiekurser.

Statistik

Bakåt i tiden förmedlades information muntligt, från person till person. När tidningar och senare radio och tv blev allmän egendom förändrades bilden och information kunde snabbt nå ut till stora grupper i samhället. Med dagens informationsteknik har möjligheter till snabb spridning ökat ytterligare. I det moderna samhället översköljs vi av information i olika medier. Det kan handla om allt ifrån enkla undersökningar av den mest populära glassen i kamratgänget till mycket avancerade vetenskapliga undersökningar. Information kan vara upplysande och det finns mycket som vi i någon mening kan "bevisa" med hjälp av statistik, men statistik kan också vara vilseledande.

En av förutsättningarna för att kunna fungera som en självständig individ är att kunna tolka, analysera och kritiskt granska informationsflödet. Tabeller och diagram är vanliga uttrycksformer för att kortfattat förmedla data, och för att kunna hantera sådan information behöver elever erfarenheter där de själva samlar och presenterar data. För att skapa förståelse för vad diagrammet representerar är det vanligt att inleda arbetet med att konstruera ett diagram med hjälp av konkreta material. Kalkylprogram såsom Excel kan vara användbara när information ska föras in i, presenteras och avläsas ur tabeller och diagram. Det är ofta enklare att mata in värden i datorn och få ut tydliga och överskådliga tabeller och diagram än att göra motsvarande arbete för hand, exempelvis när eleverna gör en undersökning.

Insamling av data

För att få fram uppgifter om fakta, omständigheter och uppfattningar i olika frågor måste data samlas in. Utgångspunkten är att den som vill göra en undersökning formulerar frågor som ska besvaras. En del frågor besvaras bäst genom observationer, andra genom intervjuer eller i enkäter.

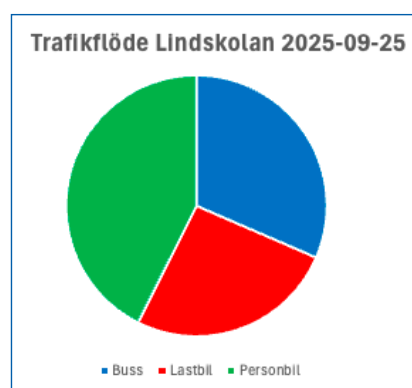
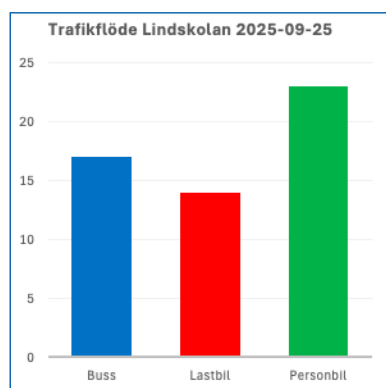
Dokumentation och analys

Data som samlas in dokumenteras i protokoll. Observationsprotokoll kan föras som tabeller där varje observation motsvarar ett streck. Strecken visar vilken frekvens, det vill säga antal observationer, de olika kategorierna har. De kategorier som undersöks i följande exempel är fordonslagen buss, lastbil och personbil. För att lättare få en överblick markeras strecken fem och fem. Här följer ett exempel från en observation av hur trafiken såg ut på vägen förbi en skola vid ett specifikt tillfälle.

Bussar				
Lastbilar				
Personbilar				

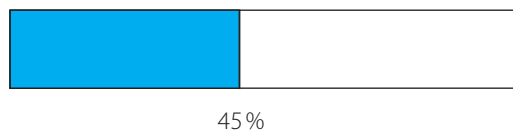
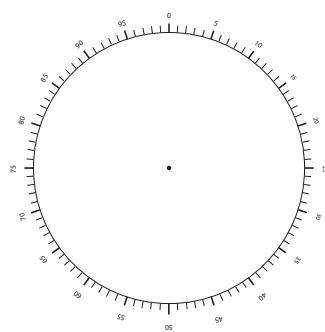
Stapel- och cirkeldiagram

Tabeller ger viss överblick, men för att ge en tydligare visuell bild av resultat redovisas de många gånger i något slags diagram, exempelvis stapel- eller cirkeldiagram. Vilken typ av diagram som väljs beror på vad man vill att diagrammet ska visa. I stapeldiagram är rektanglarnas baser alltid lika, medan höjderna motsvarar frekvensen i undersökningen. I tolkningen av stapeldiagrammet nedan kan antalet bussar, lastbilar och personbilar utläsas med hjälp av skalan på y-axeln och de numeriska värdena kan jämföras, till exempel att det var 17 bussar, tre fler än lastbilarna. Det var flest personbilar som passerade förbi skolan vid mättillfället, 23 stycken. När samma data presenteras som cirkeldiagram är det storleksrelationen mellan värdena som fokuseras, och framför allt respektive värdes andel av helheten, det vill säga andelen av den totala mängden data, som inte alls är synlig i stapeldiagrammet. De precisa antalen kan däremot inte avläsas i cirkeldiagrammet. I illustrationen visar cirkeldiagrammet att nästan hälften av de bilar som passerade vid den aktuella tidpunkten var personbilar, och att en fjärdedel var lastbilar.



Stapel-diagram och cirkeldiagram över trafikflödet vid Lindskolan.

Om ett cirkeldiagram ritas i en procentskiva är det möjligt att föra resonemang om procentandelar av datamaterialet. En procentskiva är en cirkel där omkretsen är indelad i 100 delar. En annorlunda form av stapeldiagram i den digitala världen är en slags kombination av dessa där det bara finns en stapel. Den representerar en helhet, ofta samtidigt uttryckt som 100 %, som delas i två delar där den ena delen, den fyllda, motsvarar exempelvis hur mycket det är kvar av laddningen i telefonen eller i minnet på kameran. Det är en slags mätsticka presenterad som del av



helhet. Ibland är stapeln indelad i flera delar men hela stapeln motsvarar alltid 100 %. *Procentskiva och procentstapel.*

Lägesmått

Elever behöver tolka vad andra har sammanställt i tabeller och diagram. Förutom förmåga att avläsa och tolka tabeller och diagram behövs grundläggande förståelse för de vanligast förekommande lägesmåttens typvärde, median och medelvärde (Landtblom, 2023). Ett lägesmått är ett sätt att säga något om ett stort material med bara ett enda värde.

Typvärde är det vanligast förekommande värdet. Ofta anges typvärdet som lägesmått om datamaterialet inte är numeriskt. I en undersökning av elevernas favoritmat angav flest elever pannkakor som därför blir typvärdet. Det innebär att om vi slumpmässigt frågar en elev kommer det att vara störst sannolikhet att svaret vi får är pannkakor.

Median är det mittersta värdet när numeriska data har sorterats i storleksordning. Vid ett jämnt antal observationer adderas de båda mittersta värdena och delas med två. Om det finns fem elever och en lärare i rummet och deras åldrar är 9, 9, 9, 10, 10 respektive 37 år så är medianen av deras åldrar 9,5 år (Landtblom, 2014a, 2014b, 2015).

Medelvärde är det genomsnittliga värdet då numerisk data adderas och divideras med antalet observationer. Medelvärdet av åldrarna i exemplet ovan är 14 år eftersom $(9 + 9 + 9 + 10 + 10 + 37)/6 = 84/6 = 14$ (Landtblom, 2014a, 2014b, 2015).

Sannolikhet

I många matematiska aktiviteter ska deltagarna upptäcka, hantera och uttrycka likheter och skillnader, kunna förutse vad som kommer att hända och resonera om vilka risker och chanser som olika handlingar medför. Sannolikhet innehåller allt detta och passar därför utmärkt för att stimulera nyfikenhet, lust och fantasi. Eftersom spel och vinsterbjudanden är en stor del av allas vardag i dagens samhälle är det särskilt viktigt för elever att bli medvetna om risken att bli lurad. Elever i anpassad grundskola kan ha extra svårt för att dra slutsatser och se orsakssamband och behöver därför tränas i konsekvenstänkande. Även språkliga nyanser som skillnaden mellan antal och andel behöver uppmärksammas extra mycket. Samtala exempelvis om att "Vinst på var tredje lott" inte betyder att man säkert vinner om man köper tre lotter.

Sannolikhet i vardagen

Vi gör dagligen sannolikhetsbedömningar, en del medvetna med mer eller mindre formella beräkningar, andra där vi av erfarenhet kan göra bedömningar som ligger nära vad som faktiskt kommer att inträffa. Vi bestämmer relativt enkelt hur vi ska klä oss utifrån sannolikheten att vädret blir på ett särskilt sätt under dagen, vi bedömer hur mycket frukt vi ska köpa för att det ska räcka men inte bli för mycket över, vi tar ställning till vad vi tror om ränteläget när vi ska förnya lånen.

Elever behöver få tillfälle att utveckla förmågan att göra intuitiva bedömningar av händelser i vardagen men också få kunskap om något mer formellt sätt att bedöma sannolikhet. Inledningsvis behöver de lära sig att skilja händelser som är helt säkra alternativt totalt omöjliga från händelser som är slumpmässiga (Landtblom, 2013).

Centrala termer inom sannolikhetsläran

Slump. Slump används för att beskriva en oförutsägbarhet som vanligen beror på en eller flera okända orsaker.

Slumpförsök (slumpmässigt försök). En händelse som har minst två möjliga utfall och där det är omöjligt att i förväg säga vilket som kommer att inträffa. Försöket ska kunna upprepas under i stort sett samma omständigheter. Exempel är kast med tärning och dragning ur en väl blandad kortlek.

Utfall. Ett möjligt resultat vid ett slumpmässigt försök. Vid kast med en vanlig tärning är till exempel "tre" ett utfall.

Utfallsrum. Mängden av alla möjliga utfall vid ett slumpmässigt försök. För en vanlig tärning är utfallsrummet {ett, två, tre, fyra, fem, sex}. Mängden skrivs vanligen med mängdklamrar.

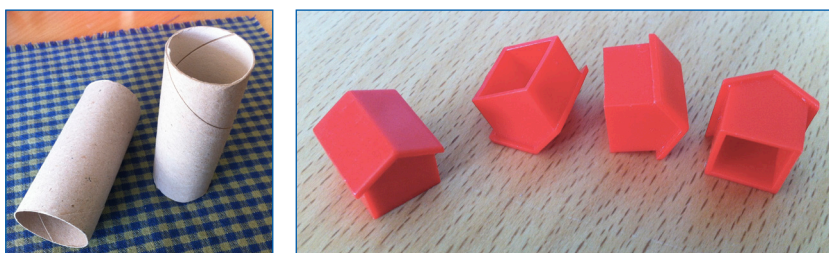
Händelse. Vilket resultat man faktiskt får då man genomför ett slumpmässigt försök. Man kan till exempel få en sexa då man kastar en vanlig tärning.

De stora talens lag. Den sats inom sannolikhetsteorin som säger att det aritmetiska medelvärdet av ett stort antal oberoende observationer av en slumpvariabel ligger nära förväntat värde.

Teoretisk, experimentell och subjektiv sannolikhet

Teoretisk sannolikhet innebär att vi i förväg kan bestämma sannolikheterna för olika utfall. Vanliga exempel utgår från mynt, tärningar och kortlekar som förutsätts vara symmetriska, det ska vara lika stor chans att få krona eller klave, lika stor chans att vilken sida som helst på tärningen kommer upp eller att inget kort i leken har större chans än övriga att bli draget. Sannolikheten att få krona är en av två, det vill säga $1/2$, att slå en 4:a på en vanlig pricktärning är en av sex, det vill säga $1/6$. Utifrån detta kan vi exempelvis beräkna sannolikheten för att tärningen visar ett jämnt antal prickar, 2, 4 eller 6 vid ett kast ($3/6 = 1/2$).

Experimentell sannolikhet handlar om slumpförsök där det inte lika säkert går att bestämma utfallen som i exemplen ovan. Ett exempel är att kasta något asymmetriskt som kan landa på olika sätt, exempelvis toapappersrulle eller leksakshus. Hur saken landar noteras vid många kast. Detta sätt att undersöka sannolikhet kallas "De stora talens lag". Förutom att det måste ske ett mycket stort antal försök är det nödvändigt att varje försök görs på identiskt sätt varje gång och varje försök ska dessutom vara oberoende av de andra.



Asymmetriska saker att undersöka experimentell sannolikhet med.

Subjektiv sannolikhet används för att beskriva sannolikhet för händelser som inte kan bestämmas på något av de båda andra sätten. Vi kan ta en väderprognos som exempel. Det går inte att beräkna vädret enligt teoretisk sannolikhet eftersom det inte finns ett begränsat antal väl definierade utfallsrum. Det är omöjligt att förutsätta att det till exempel blir ett av utfallen sol, mulet, regn eller snö eftersom det finns andra vädertyper som växlande molnighet och spridda skurar. Vi kan inte heller göra en stor mängd undersökningar av morgondagens väder. I stället måste vi förlita oss på andra sätt att använda det kunnande som finns: logik, matematiska modeller, erfarenheter, statistik. Ju mer kunskap som finns om ett område, desto säkrare sannolikhetsberäkningar kan göras.

Elevers dokumentation

I denna text fördjupas resonemang runt grundläggande dokumentationsformer. Förslag ges också på mer omfattande sätt för eleverna att dokumentera, vilka förutsätter att eleverna själva eller med stöd kan läsa och skriva korta texter. Med "elevers dokumentation" avses den dokumentation som varje elev gör av sin kunskap, sitt arbete och sitt lärande, enskilt eller tillsammans med kamrater och med nödvändigt stöd av lärare och elevassistent. Eleverna dokumenterar om och utifrån sina erfarenheter, upptäckter, lärande och kunnande. Detta till skillnad från den dokumentation som läraren gör om varje elev. Som en av tre framgångsrika undervisningsmetoder för elever med intellektuell funktionsnedsättning identifierade Göransson et al. (2016) vikten av att fokusera på elevernas egna upplevelser av det matematiska innehållet. Läraren behöver således använda olika sätt att representera och dokumentera elevens upplevelser och kunskap så att den blir synlig för både eleven och läraren. Dokumentationen används också som ett sätt att avlasta minnet. Eftersom elever i anpassad grundskola behöver gott om tid för att lära sig är behovet av att kunna återkoppla till vad tidigare lektioner handlat om mycket stort.

Laborativa matematikmaterial har stor potential i matematikundervisningen, men en nackdel med laborativt arbete kan vara att det inte "finns något kvar" då materialet är undanplockat. Det är ett skäl till att eleverna behöver dokumentera vad de gör. Som det föreslås i flera av

undervisningsaktiviteterna kan den inledande delen av elevers dokumentation göras mycket enkel med hjälp av digitala verktyg genom att fotografera eller filma. Första steget i elevers dokumentation är att spara ett lektionsarbete på något sådant sätt. Foton och filmer kan sedan återanvändas och utvecklas. Eleverna kan förstärka sitt lärande genom att berätta och återberätta vad de har gjort på en lektion och därefter repetera detta under kommande lektioner och vidareutveckla innehållet, exempelvis genom att sätta text till bilderna.

Det finns också en risk att steget från det laborativa arbetet till ett abstrakt arbete i en lärobok blir för abrupt och stort. Det kan till och med bli så att det laborativa arbetet känns förvirrande för eleven om det inte tydligt hänger samman med den abstrakta matematiken de möter. Stegen mellan ytterligheterna konkret arbete och abstrakt tänkande får inte glömmas bort – eller ”effektiviseras” bort. Både det halvkonkreta och det halvabstrakta steget behöver finnas med (Heddens, 1986; Hord & Bouck, 2012).

Såväl det halvkonkreta som det halvabstrakta steget innehåller bilder. Först föreställande bilder, sedan går det mot alltmer informella och skissartade symboler. Även om det finns fantastiska möjligheter med den digitala tekniken får inte elevernas egen produktion av bilder glömmas bort. Det är något helt annat att lägga tid på att själv rita av och färglägga jämfört med att ta ett foto. Låt eleverna, efter var och ens förmåga och förutsättning, dokumentera många av sina bilder för hand. Att verkligen rita av alla kombinationer av ett tals uppdelning ger tid för tänkandet och befastande. Speciellt för elever med svag språkutveckling kan möjligheten att uttrycka sig med bilder, på papper eller digitalt, ge dem en chans att bearbeta stoffet.

Struktur och stöttning

I ordet dokumentera ligger att man ska styrka och bevisa något. Här handlar det om att eleverna ska kunna visa för sig själva och andra vad de har arbetat med, vilka slutsatser som går att dra av det de precis har varit med om och vilka samband de ser. Att skriva, eller på annat sätt producera en text eller en berättelse, kan bidra till att stärka elevernas metakognitiva process – men det sker inte av sig självt. Om eleverna ska kunna dokumentera så att det bidrar till att stärka deras förståelse för olika begrepp måste det pågå kontinuerligt under en längre tid. De behöver också få stöd för sitt skrivande. Nückles et al. (2009) visar att elever kan behöva hjälp av väl valda frågor för att utveckla skrivandet. Frågorna bör vara av olika art och handla om hur eleven upplever något, vad som uppmärksammas, specifika frågor om ett matematiskt innehåll och om hur eleven uppfattar sitt lärande. Ibland kan inledande meningar eller enstaka ord som sätter igång berättandet vara till hjälp.

Vissa elever kan ha nytta av stödfrågor om vad som var lätt eller svårt, vad de lagt märke till, vad de lärt sig eller vad de vill veta mer om. Elever i anpassad grundskola kan behöva hjälp för att omsätta sina tankar i text eller bild. Det viktiga är att det som skrivs är elevens tankar och att det är elevens förståelse av det matematiska innehållet som dokumenteras. Genom att ställa frågor anpassade till elevens förmåga att svara kan elevens lärande beskrivas med stödord eller enkla meningar. Detta läses sedan upp för eleven för att säkerställa att det är rätt uppfattat.

För att få en god utveckling av dokumentationen krävs det tät uppföljning. Läraren måste visa tydligt intresse för vad eleven har formulerat och ge respons som leder framåt. Detta kan låta arbetskrävande men det behöver det inte bli. Ett gott råd är att skriva lite men ofta.

Som ett stödjande underlag föreslår Liljedahl (2022) att läraren förbereder dokumentationen före lektionen, exempelvis med följande struktur:

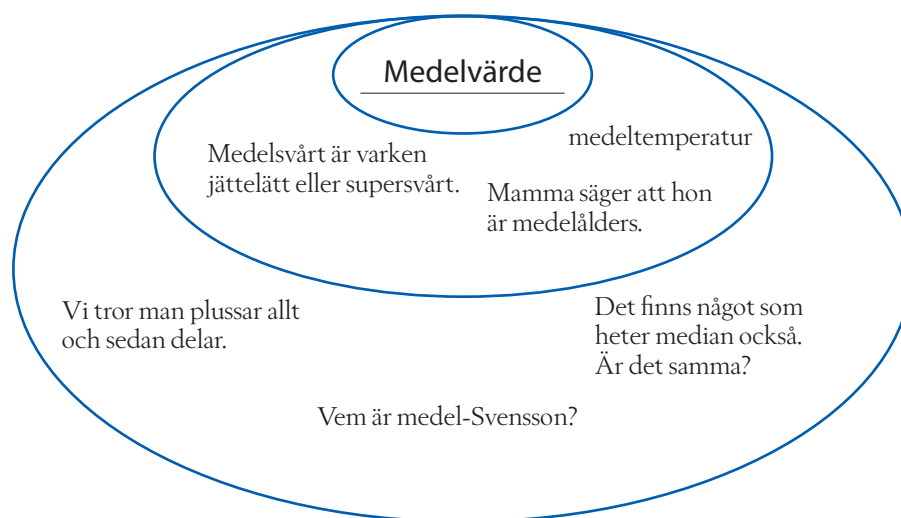
Min 'take-away' från den här lektionen (Här skriver/ritar eleven vad hen vill komma ihåg från lektionen.)	Exempel (Här har läraren skrivit eller ritat ett exempel som har behandlats på lektionen och där eleven bara ska fylla i någon liten del.)
Ett eget exempel (Här ska eleven själv skriva eller rita sitt exempel.)	

Före – efter

Lärare behöver veta vilka förkunskaper eleverna har. De som känner sina elever har i regel samlat information under en kortare eller längre tid och vet ganska väl vilket kunnande varje elev har. Men även när läraren tror sig känna till vilka förkunskaper som finns i gruppen kan det finnas anledning att undersöka elevers förståelse inför ett nytt arbetsområde. Test av olika slag kan vara ett sätt att skaffa sig information, att låta eleven själv beskriva med egna ord är ett annat. Mallen nedan kan fungera som underlag för att undersöka vad elever kan eller känner till både inför och efter undervisning, samtidigt som det kan ge eleverna själva en uppfattning om vad de redan kan och senare lär sig. Så här arbetar man med mallen:

1. På strecket i den innersta ellipsen skriver eleverna det aktuella begreppet.
2. I nästa ellips skriver och ritar eleverna individuellt, med nödvändigt stöd, vad de kommer att tänka på, kan eller vet om begreppet.
3. Fortsätt sedan gemensamt att jämföra vad alla har skrivit och fyll på med sådant som kamrater säger i den största ellipsen. Läraren samlar in och sparar.
4. Efter genomförd undervisning får varje elev tillbaka sitt dokument och fyller nu i nyvunna kunskaper utanför den största ellipsen.

För eleverna ger de två första punkterna en beredskap inför vad som ska komma. Den tredje punkten visar att det är bra att kunna saker själv, men det kan ge mycket extra om man tar del av vad kamraterna kan. Det är inte ovanligt att elever enklare tar till sig något som en kamrat säger än om läraren säger exakt detsamma. Förutom fokus på ett begrepp ger arbetsgången eleverna möjligheter att samtala, resonera, se samband, förutsäga, ifrågasätta, fantisera, motivera, ta initiativ et cetera. Förfaringssättet ger läraren en översiktlig bild av elevgruppens kunnande inför ett nytt arbetsområde. Några elever behöver kanske en repetition medan andra elever tydligt visar att de har tillräckliga förkunskaper.



Namn:	Datum 1:	Datum 2:
-------	----------	----------

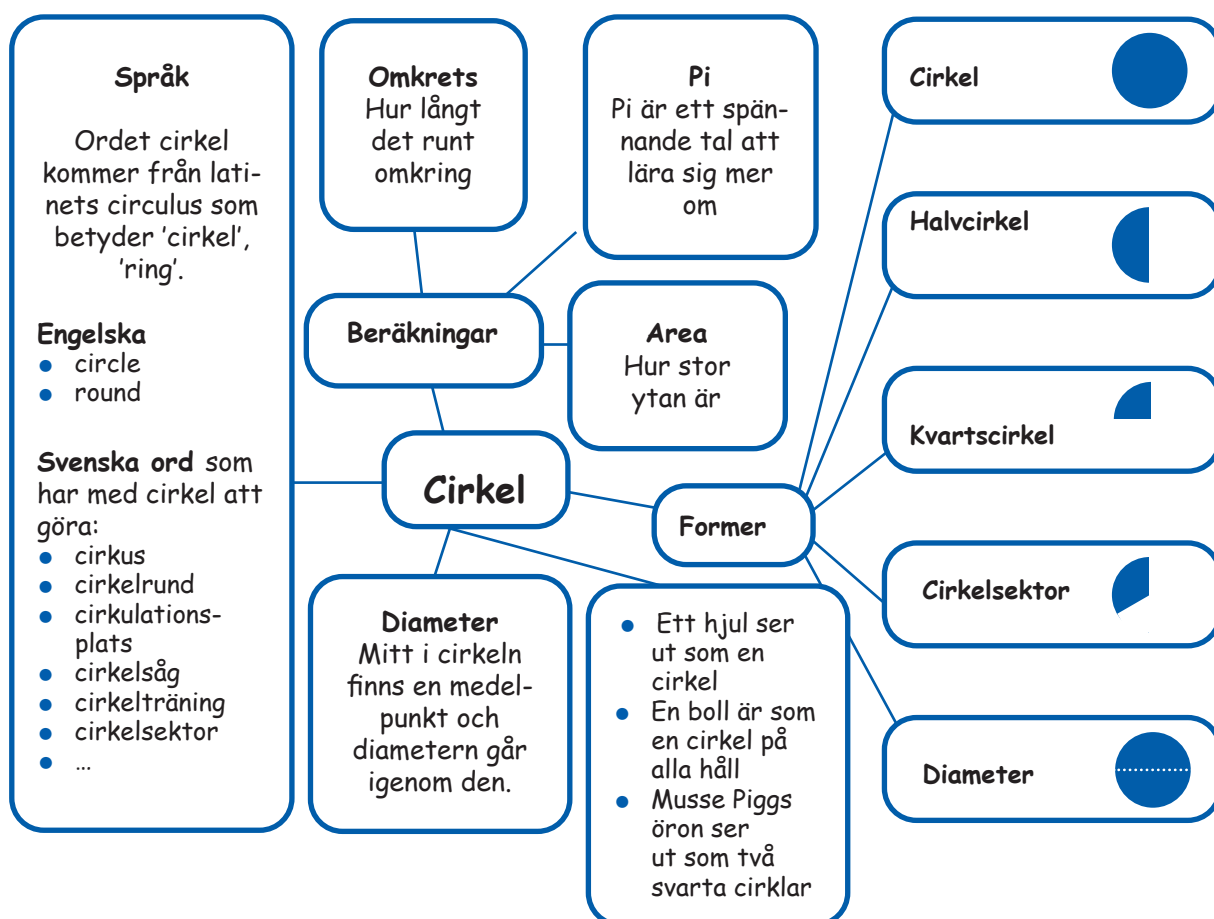
Mall för att dokumentera elevers kunskaper, här exemplifierat med begreppet medelvärde.

Tankekartan

Under tiden arbete med ett område pågår, eller i dess slutfas, kan gruppen samla information på en gemensam tankekartan (mindmap). Nedan finns ett exempel på en tankekartan kring begreppet cirkel. Läraren ritar och skriver i den gemensamma tankekartan och varje elev följer i möjligaste mån med på en egen. Det är svårt att ge detaljerade anvisningar eftersom arbetet kan bli mycket olika beroende på vilken teknik som används och hur eleverna kan följa med på egna dokument. Interaktiva skrivtavlor ger helt andra praktiska möjligheter än om arbetet sker på en vanlig skrivtavla. Vissa delar är ändå desamma. I mitten skrivs det aktuella begreppet. Några "bubblor" är av standardkaraktär:

- egenskaper som begreppet har
- begreppets definition
- beräkningar eller rutiner som hör till begreppet
- språk.

När det gäller språk kan det vara bra att fundera på om det finnas anledning att ta upp vad begreppet heter på ett annat språk. Finns det elever med annat modersmål? Är det relevant att koppla till ett engelskt begrepp? Vilka andra svenska ord har med begreppet att göra?



Tankekartan kring begreppet cirkel.

Lästips och förslag på kompletterande aktiviteter

För att hitta artiklar från Nämnaren, sök på ncm.gu.se/nbas.

Meningsfull statistik

Lena Landgren, Nämnaren 2023:1

Statistiska begrepp och uttrycksformer

Kristina Juter, Nämnaren 2013:4

Läget? Tja, det beror på variablerna

Karin Landtblom, Nämnaren 2014:1

Sagt & gjort: Matematiklyftet gör nedslag i slöjden

Berthold Nilsson, Anne Uebel & Ulf Ståhlgren, Nämnaren 2015:3

Sagt & gjort: Sannolikhet från början

Pirjo Repo, Nämnaren 2013:1

Tärningar och astragaler

Per Berggren & Ellinor Isaksson, Nämnaren 2016:4

Hur sannolikt är det?

Karin Landtblom, Nämnaren 2013:4

Sagt & gjort: Kombinatorik från början

Pirjo Repo, Nämnaren 2016:1

Strävor

För att hitta aktiviteter från Strävorna, sök på ncm.gu.se/stravorna.

Vad kan hända?

Vad är helt säkert? Vad är helt omöjligt? Vad skulle kunna ske för att det omöjliga ändå händer? Från dessa frågor leder aktiviteten vidare till att kasta mynt och tärningar eller dra kort ur en kortlek för att beräkna olika sannolikheter.

Satsa rätt

Spelet som presenteras är ganska likt många traditionella sannolikhetspel, men här ska två tärningars "ögon" multipliceras. Detta gör att utfallet blir större än vid addition vilket eleverna troligen är mer vana vid. *Satsa rätt* ger en ökad förståelse för tals faktorer och kan, beroende på elevernas förkunskaper, vara en övning i sannolikhetslära.

Flaskracet

Syftet med Flaskracet är att väcka frågor och diskussioner om utfallsrum och om skillnaden mellan *absolut frekvens* (antal) och *relativ frekvens* (andel). Det är viktigt att eleverna får insikt i hur den relativa frekvensen stabiliseras då många försök görs och att den närmar sig den teoretiska sannolikheten efter många observationer. Eleverna får en konkret upplevelse av slump och utmanas att resonera om slump, risk, chans och sannolikhet.

Sannolika paket

Uppgifterna på elevsidan används som utgångspunkt för diskussioner och resonemang om sannolikhet. Konkret material är inte nödvändigt, men beroende på ambitionsnivå kan en paketkalender tillverkas och den kan vara mer eller mindre omfattande.

Sannolikhet

I vardagliga aktiviteter kan sannolikhet komma till uttryck då det handlar om att förutse vad som kommer att hända och vilka risker eller chanser som olika handlingar medför. Vad är säkert? Vad är omöjligt? Vad är slump? Innebörden i sannolikhet är viktig kunskap för alla och det finns gott om exempel på att sannolikhet används alltmer i vår vardag. I väderprognoser anges risken för regn ofta i procent, sannolikheten att lyckas i spel formuleras väldigt positivt i reklamen, vi blir översköjda med siffror som talar om hur mycket risken för olika sjukdomar ändras beroende på livsstilsfaktorer.

Att använda mynt, tärning och kortlek är klassiska inkörsportar till sannolikhet och kan exempelvis leda till samtal om sannolikhet för vinst i olika former av spel.

Progression

I den första aktiviteten förs samtal om vad som kan vara *helt säkert* eller *helt omöjligt*. Därefter utökas de grundläggande begreppen med ord som *chans*, *risk* och *slump*. Eleverna får undersöka olika sannolikheter genom att kasta mynt och i den sista aktiviteten kasta och summera *utfallet* av två slagna tärningar.

Ämnesområde: Kan det hända?

Några grundläggande begrepp som rör sannolikhet undersöks: Vad är helt säkert? Vad är omöjligt?

Årskurs 1–3: Vad kan hända?

De centrala begreppen utökas med orden chans och risk. Om eleverna exempelvis får en godis eller ett poäng i ett spel varje gång de drar en vit socka så pratar man om chansen att få en vit socka och risken att få en svart eller blå eftersom chans upplevs som positivt och risk som negativt.

Årskurs 4–6: Kasta mynt

Att kasta mynt, eller markörer med olika färg på de båda sidorna, har fördelen att det bara finns två möjliga utfall. Vid enstaka kast går det inte att förutsäga vilken av sidorna som kommer upp men ju fler kast som görs desto större blir sannolikheten att det blir hälften av varje.

Årskurs 7–9: Kast med två tärningar

Vilken summa är vanligast vid kast med två tärningar? Eleverna får göra en gemensam undersökning och tillsammans dra slutsatser.

Kan det hända?

I många matematiska aktiviteter behöver vi upptäcka, hantera och uttrycka vad som är möjligt och vad vi med säkerhet kan veta. Syftet med den här aktiviteten är att låta elever fundera på olika tänkbara situationer och ta ställning till vad som är *helt säkert* och vad som är *helt omöjligt*. Situationerna kan ge förutsättningar för viss förståelse för några grundläggande begrepp som har med sannolikhet att göra.

Material

Kort med påståenden och ett brev.

Förslag på påståenden

Hästar kan flyga.	Katten kan jama.	Hundar kan läsa böcker.
Kaniner har öron.	Moa tvättar himlen.	Jag kan cykla på månen.
Granen kan köra moped.	Bilar har hjul.	Mjölk växer på marken.
Morötter kan krypa.	Människor har svans.	Det snöar alltid.
När jag badar blir jag våt.	Elefanter har snabel.	Bananer är gula.
Jordgubbar är blå.	Godis är gott.	Bröd växer på träd.
Apor kan klättra.	Tigrar är randiga.	Is är kallt.
Vatten är vått.	Solen är varm.	Det snöar på sommaren.

Introduktion

Fånga elevernas intresse genom att berätta att det har kommit ett brev till klassen. Öppna brevet tillsammans och se efter vad det innehåller. Samtala om vem som kan ha skickat brevet och hur de kan få veta det. Byt gärna ut namnen så de relaterar till och väcker intresse hos eleverna. Läs upp brevet:

Hej!

Jag heter Harry. Min kamrat Ron och jag är inte överens och behöver er hjälp. På korten i brevet står det saker och vi undrar: Vad är helt säkert? Vad är helt omöjligt?

Tack för hjälpen!

Hälsningar

Harry

Beskrivning

1. Välj några påståenden som är lämpliga för eleverna. Se till att det i urvalet finns exempel på både helt säkert och helt omöjligt. Lägg dem i kuvertet tillsammans med brevet. Berätta om innebörden i uttrycken helt säkert och helt omöjligt. Ta ett kort i taget. Läs tillsammans och samtala om vad som är helt säkert eller inte alls möjligt.
2. Uppmuntra om möjligt eleverna att berätta utifrån sina egna liv eller tankar med hjälp av följande inledningar:
 - Berätta om något som du är helt säker på kommer att hända senare idag.
Vad är det som gör att du är helt säker?
 - Vad skulle kunna hända för att det inte längre skulle vara helt säkert?
Vad säger ni andra – är det helt säkert att detta kan hända?
 - Berätta om något som absolut inte kan hända senare idag.
Vad är det som gör att detta är helt omöjligt?
Vad skulle kunna hända för att det inte längre skulle vara helt omöjligt?
Vad säger ni andra – är det helt omöjligt att detta kan hända?

Elevers dokumentation

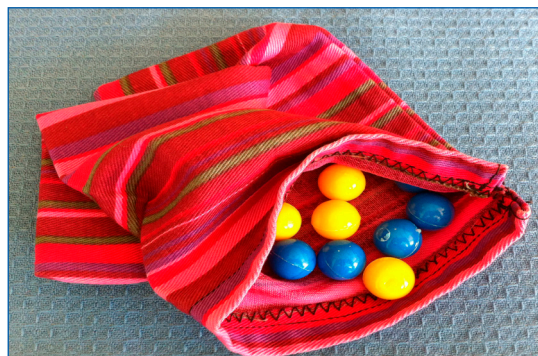
Välj ett påstående som engagerade eleverna. Brodera på något sätt ut påståendet genom att exempelvis illustrera det eller sätta in det i en berättelse där sannolikheten, i form av helt säkert eller omöjligt, blir tydlig. Välj sedan ett påstående av det andra slaget och skapa en berättelse även kring det. Låt eleverna vara aktiva efter var och ens förmåga, gör en gemensam diktering och illustrera berättelsen.

Vad kan hända?

Vad kan hända? Är det säkert? När använder elever sannolikhet i sin vardag? Detta är några av de frågor som behandlas i den här aktiviteten som utgår från den vardagliga händelsen att plocka upp strumpor ur lådan för att sätta dem på sig och vilja att de ska ha en viss färg. Då kan man fundera på hur troligt det är att man får den färg man vill ha om man inte tittar när man tar upp strumporna. Syftet med aktiviteten är att eleverna får bekanta sig med några av de centrala termerna inom sannolikhetsläran och träna på att göra bedömningar av händelser i vardagen.v

Material

Lådor eller kartonger, exempelvis skokartonger, strumpor i 2–3 olika färger, aktiviteten exemplifierar med svarta, vita och röda strumpor. Det går också bra att använda tygpåsar som inte är genomskinliga samt puttekulor i 2–3 olika färger eller något helt annat som har olika färg men samma form och storlek.



Strumplåda och kulpåse.

Introduktion

Inled arbetet med att samtala i gruppen om orden *helt säkert*, *helt omöjligt*, *chans* och *slump*. Uppmuntra eleverna att berätta om sina erfarenheter och tankar med hjälp av följande inledningar:

- Berätta om något som du är *helt säker* på kommer att hända senare idag / i morgon.
- Vad är det som gör att du är helt säker?
Vad skulle kunna hända för att det inte längre är helt säkert?
Vad säger ni andra – är det helt säkert att detta kan hända?
- Berätta om något som *kanske* kan hända senare idag / i morgon.
- Vad är det som gör att det finns en möjlighet att det händer?
Vad skulle kunna hända för att det ska, eller inte ska, inträffa?
Vad säger ni andra – kan detta kanske hända?
Låt var och en berätta, rita, skriva ...

Beskrivning

Gör i ordning några uppsättningar med lådor som bara innehåller en enda vit strumpa, alternativt några kulpåsar som bara innehåller en enda kula. Ge en låda till varje par elever. Fråga eleverna om de tror att de kommer att få upp en vit strumpa om de plockar upp strumpan ur lådan. Den vanliga reaktionen är att alla tror att de ska få upp en vit strumpa. Bekräfta att det är helt säkert att de får upp en vit strumpa om det bara finns en vit strumpa i lådan.

Presentera en skala från omöjligt till säkert som i figuren, men ritad på tavlan eller på ett stort papper, och fråga eleverna var någonstans på skalan det går att sätta ett kryss för händelsen "att få en vit socka ur en låda där det bara finns en vit socka" Sätt tillsammans ut ett kryss vid ordet säkert. Poängtera att det är helt säkert.



Skala omöjligt – helt säkert.

Låt eleverna lägga till en svart strumpa i lådan, helst en som är svart men för övrigt är helt lik den vita.

- Fråga om de tror att det är lika säkert att få upp en vit strumpa om de blundar när de tar upp en av dem.
- Låt eleverna parvis prova tio gånger och se hur många gånger de får upp den vita respektive svarta strumpan. Efter varje gång stoppar de tillbaka strumpan. Var tydlig med att en i paret lägger tillbaka strumpan och rör om i lådan och den andre blundar och tar upp en strumpa.

Sannolikheten att de får upp den vita strumpan är $\frac{1}{2}$. Det innebär "ungefär varannan gång" och det resultatet kommer de oftast nära. Sätt tillsammans ut ett kryss mitt på skalan för att visa att det varken är säkert eller omöjligt.

Dela ut elevbladet *Skala omöjligt – säkert* och låt eleverna sätta kryss på skalan till varje händelse. Läs gemensamt uppgiften om det behövs och repetera genom att visa på tavlan vilken sida som betyder säkert, vilken som betyder omöjligt och att när det varken är säkert eller omöjligt sitter krysset någonstans emellan. Låt eleverna rita kryss på skalorna på sina elevblad till "bara en vit strumpa" och "en vit och en svart strumpa". Låt dem eventuellt experimentera mer.

Lägg sedan till en strumpa med en tredje färg i lådan, till exempel en röd strumpa, och utför aktiviteten på nytt.

Om möjligt, låt slutligen eleverna hitta på en egen händelse, till exempel med fyra färger eller med flera av varje färg. Låt dem experimentera och diskutera tillsammans var krysset ska stå.

Elevers dokumentation

När alla elever gjort alla tre händelserna kan ni titta på deras dokumentation och jämföra resultaten. Diskutera eventuella olikheter.

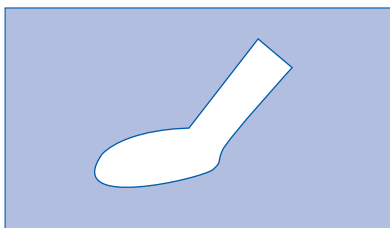
Resonera om när det är säkert att man får en vit strumpa och att ju fler färger som finns desto mindre säkert är det. Berätta att ju säkrare något är desto mer sannolikt säger man att det är. Utöka med fler utmanade frågor såsom

- Vad tror ni om sannolikheten att få en vit strumpa om det ligger TIO strumpor i olika färg i lådan?
- Vad tror ni om sannolikheten att få en vit strumpa om det ligger TRE vita och EN svart i lådan?
- Vad tror ni om sannolikheten att få en vit strumpa om det bara ligger EN svart i lådan?

Elevblad Skala omöjligt – säkert (med strumpor)

Hur troligt är det att få en VIT strumpa?

Markera på skalan.

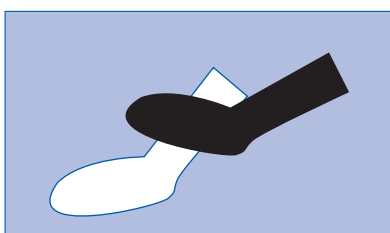


Det finns bara en vit strumpa i lådan.



omöjligt

säkert

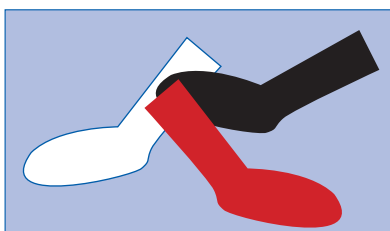


Det finns en vit och en svart strumpa i lådan.



omöjligt

säkert



Det finns en vit, en svart och en röd strumpa i lådan.



omöjligt

säkert

Elevblad Skala omöjligt – säkert (neutral)

Hur troligt är det att få EN VIT?

Markera på skalan.

Det finns EN VIT.



omöjligt

säkert

Det finns EN VIT och EN SVART.



omöjligt

säkert

Det finns EN VIT, EN SVART och EN RÖD.



omöjligt

säkert

Kasta mynt

Nu när mynt används allt mer sällan i vardagslivet kan det finnas fördelar med att använda dem i andra sammanhang. Eleverna ges här möjlighet att verkligen titta många gånger på en enkrona – eller ett annat mynt – och reflektera över hur den faktiskt ser ut. Syftet med den här aktiviteten är att eleverna, genom att kasta mynt, introduceras för slumpförsök och begreppet experimentell sannolikhet.

Material

I aktiviteten används enkronor som exempel på mynt, men det går naturligtvis lika bra att använda vilka mynt som helst eller tvåfärgade markörer, elevblad *Krona och klave*.

Tvåfärgade markörer finns exempelvis i spelet Othello och det finns även markörer med olika färger på sidorna att beställa hos läromedelsföretag.

Introduktion

Inled arbetet med att repetera orden helt säkert, omöjligt, chans, risk och slump. Begreppet slump är mycket abstrakt. Det finns ingen entydig definition men de flesta har en intuitiv känsla för vad det är. Ge exempel från tillfällen då du tyckte att det var något slumpmässigt som hände. Låt eleverna ge exempel och motexempel. Vad är slump? Vad är inte slump?

Om ett mynt används, prata om det tillsammans. Titta på en krona och bestäm vad som är krona och vad som är klave. Kanske är det enklare att kalla sidorna något annat. Kungen och tre kronor?

Samtala om myntkastning. Vet eleverna vad det är och när det kan användas?

Beskrivning

I aktiviteten ska varje elev kasta ett mynt ett antal gånger. Instruera eleverna hur det går till och bestäm hur kastet ska utföras. Hur många kast varje elev ska göra beror på antalet elever som ska kasta. Sammanlagt bör det bli åtminstone 100 kast, men ju fler kast desto säkrare resultat.

Låt varje elev eller grupp utföra exempelvis 20 kast med ett mynt. Be dem inledningsvis redovisa varje kast i form av en sekvens på ett papper, exempelvis genom att skriva ett kryss för krona och en nolla för klave, eller med att sätta kryss med två olika färgpennor.

X 0 X X X 0 0 X 0 0 0 X 0 X X 0 0 0 0 X

Diskutera hur sekvensen ser ut och hur stor chans det är att få krona i ett kast.

- Kommer det en krona och en klave i vartannat kast?
Varför inte?
- Kan man någonsin vara säker på vad det blir i nästa kast?
Varför?
Varför inte?

Låt därefter varje elev eller elevgrupp räkna ut hur många de har fått av varje sida och sammanställa sin sekvens i den tabell som finns på elevbladet.

Sammanställ därefter samtliga grupperas kast i en gemensam tabell. Beräkna hur många de har fått tillsammans av krona respektive klave. Samtala om hur stor sannolikheten är att få krona vid ett kast.

Elevers dokumentation

Använd elevbladet till dokumentationen. Låt eleverna skriva av även den gemensamma tabellen så att de kan jämföra resultaten. Låt eleverna gemensamt sammanfatta:

- Vad är slump?
- Vad är inte slump?
- Hur stor är chansen att få krona vid ett kast med mynt?
- Hur stor är chansen att få klave vid ett kast med mynt?
- Hur många gånger kommer du troligtvis "att få krona" om du kastar ett mynt 1000 gånger?
Åskådliggör exempelvis att 500 är hälften av 1000 genom att jämföra en tusenkub i tiobasmaterialet med fem hundraplattor på varandra.

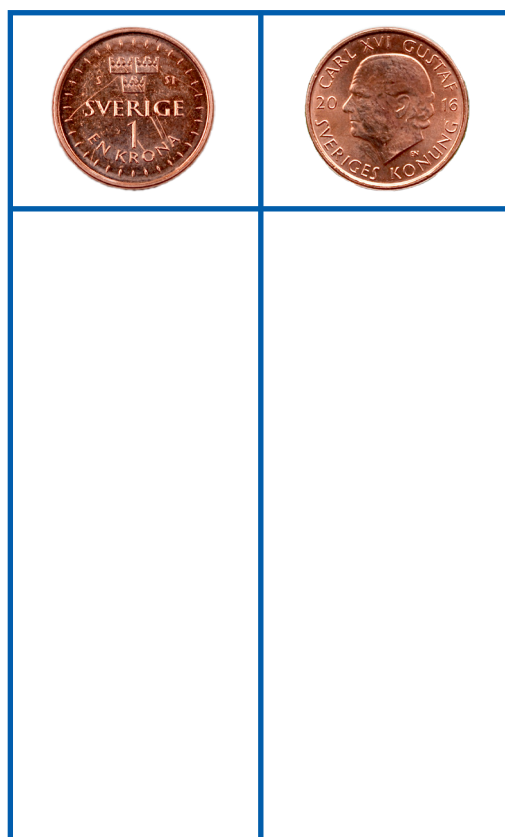
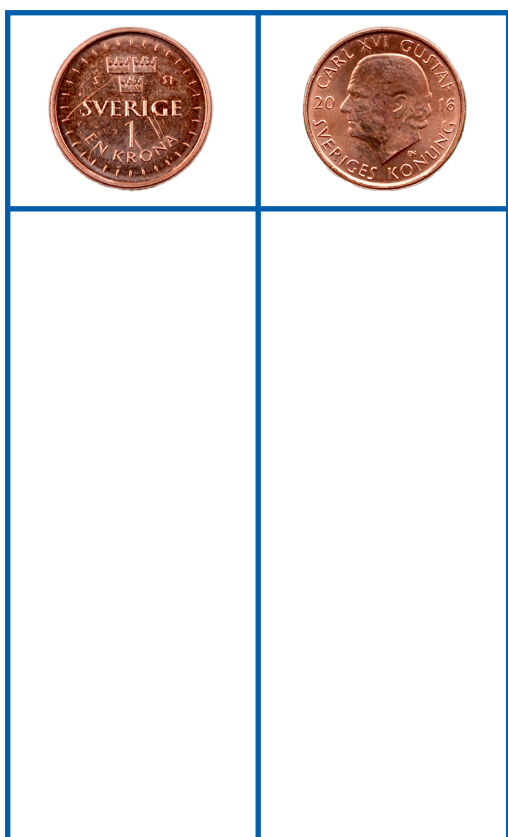
Anpassningar

Elever som inte har finmotoriska förutsättningar att kasta mynt för hand kan göra det med exempelvis en app som slumpar fram önskat antal kast. De elever som kan kasta mynt många gånger bör få göra det en eller ett par gånger innan de går över till att slumpa fram kasten digitalt. Det ger en helt annan förståelse för vad som händer digitalt om man själv först har provat "för hand".

Då eleverna ska kasta myntet kan det vara till hjälp att lägga fram ett mynt med krona upp på ett papper och skriva ett tydligt kryss på pappret och motsvarande med klave upp och en nolla.

Om några elever behöver utmaningar kan de räkna ut sannolikheten för att få krona utifrån de olika tabellerna och jämföra med sannolikheten utifrån den gemensamma tabellen. Hur skiljer sig sannolikheterna åt? Hur kommer det sig? Vad händer med den beräknade sannolikheten när man ökar antalet kast? Vad skulle sannolikheten vara om vi kunde göra 100 000 kast?

Elevblad Krona och klave



Kast med två tärningar

När använder elever sannolikhet i sin vardag? Spelar de spel? Tar de lotter? Har de en rimlig förståelse för chansen att vinna? I den här aktiviteten får eleverna undersöka slump och sannolikhet genom att kasta tärning. När en tärning kastas är utfallet likformigt, men när två tärningar kastas är sannolikheten att summan är 6 mycket större än att sannolikheten för att summan är 3. Varför är det så? Syftet med den här aktiviteten är att eleverna ska introduceras för slumpförsök och begreppet experimentell sannolikhet. Om det finns förutsättningar i gruppen för variation kan undervisningsaktiviteten även vara en introduktion till kombinatorik.

Material

Varje grupp behöver två tärningar, gärna med olika färger för att det ska bli lättare för eleverna att upptäcka att man exempelvis kan erhålla summan 11 på två olika sätt: (5, 6) och (6, 5). Det finns två olika elevblad: *Gissningar och resultat*, samt *Tabell*.

Introduktion

Samtala om olika tärningsspel. Fråga eleverna vilka tärningsspel de har spelat tidigare och hur många tärningar de har använt till de olika spelen. Om det är någon elev som inte har erfarenhet av att ha spelat spel med tärningar tidigare kan det vara bra att starta med ett enkelt tärningsspel.

Diskutera orden sannolikhet, chans, risk och slump. Hur stor är sannolikheten att få en sexa om man kastar en sexsidig tärning? Är sannolikheten större eller mindre att få en sexa ifall man kastar en tiosidig tärning? Varför? Ändras sannolikheten att få en sexa i ett andra kast om man just slagit en sexa?

Beskrivning

Eleverna ska undersöka vilken summa som är mest sannolik vid kast med två tärningar. Aktiviteten går att utföra enskilt eller i grupp. Varje elev eller grupp ska utföra 30 kast med två tärningar och för varje kast beräkna summan av de båda tärningarnas tal. Dela även ut det första elevbladet, *Gissningar och resultat*.

1. Innan eleverna börjar kasta ska de gissa hur många gånger varje summa kommer att förekomma och skriva antalet i de översta rutorna på elevbladet. Eftersom eleverna ska utföra 30 kast ska summan av deras gissningar bli 30.
2. Låt därefter eleverna slå de båda tärningarna och addera talen. Be dem göra en streckmarkering för summan efter varje kast överst i den dubbla rutraden. Det ska bli 30 streck sammanlagt.
3. När eleverna är färdiga ska de skriva in det verkliga resultatet nederst i den tredje rutraden och jämföra med sin inledande gissning.
4. Samtala om resultaten och ställ frågor till eleverna.

- Hur kommer det sig att ingen har fått summan 1?
- På hur många sätt kan man få summan 3?

Låt eleverna använda de två olikfärgade tärningarna och fundera över de olika kombinationerna. Ta gärna fram fler tärningar så att olika kombinationer kan läggas upp samtidigt.

- På hur många sätt kan man erhålla summan 5?
- På hur många olika sätt kan man få summan 7?

Låt eleverna fundera tillsammans och skriv upp elevernas olika svar på tavlan.

- Vilken summa skulle du satsa på om du vill ha störst chans att vinna? Varför?

Anpassning och utmaning

Det finns stora och mjuka tärningar som kan användas vid behov. Låt elever som inte har de finmotoriska förutsättningar att kasta tärningar för hand istället använda en digital slumpgenerator som slumpar fram önskat antal kast. Kasta i så fall en eller ett par gånger tillsammans med eleven först, innan ni går över till att slumpa fram kasten digitalt. Det ger en helt annan förståelse för vad som händer digitalt om man själv först har provat "för hand".

Elever som behöver större utmaning kan arbeta med elevbladet *Tabell*. Be eleverna fundera tillsammans över hur många kombinationer det finns för varje summa. Skilj på de olika färgerna på tärningarna. Om det bara finns tärningar i en färg, kan man kalla dem för tärning 1 och tärning 2 eller kasta på två olikfärgade pappersark. Varje elevgrupp fyller i tabellen. Eftersom det blir så många som 36 kombinationer kan man eventuellt fördela de olika summorna på olika grupper på lämpligt sätt. Be de elever som behöver utmaningar att fundera över summorna med flest antal kombinationer. Jämför de olika gruppernas tabeller.

Sammanställ gemensamt samtliga kombinationer. Jämför antalet kombinationer med antalet streck som eleverna satte för olika summor när de kastade två tärningar och diskutera vilken summa som har högst sannolikhet. Ställ frågor till eleverna:

- Hur många olika kombinationer finns det totalt?
- Vilken summa är vanligast? Varför?

Räkna tillsammans fram den teoretiska sannolikheten för de olika summorna utifrån tabellen.

Summa	Kombinationer
1	–
2	(1,1)
3	(1,2) (2,1)
4	(1,3) (2,2) (3,1)
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)
10	(4,6) (5,5) (6,4)
11	(5,6) (6,5)
12	(6,6)

Ifylld tabell över kombinationer för olika summor.

Variation

Dela in eleverna i små lag och ge varje lag en spelplan med rutor numrerade från 1–12 (kopieringsunderlag finns i slutet av aktiviteten). Ge också varje lag ett bestämt antal markörer i en egen färg som de ska placera på rutorna. Markörerna får placeras på vilka rutor som helst, även flera på samma ruta. Sedan slås två tärningar, gärna med olika färg. De lag som har placerat någon markör på den summa som erhålls får plocka upp markören. Om exempelvis tärningarna visar talen två och fem får de lag som har lagt en markör på sju ta upp den. Har laget lagt flera markörer på samma tal tas ändå bara en upp varje gång. Vinner gör det lag som först har plockat upp alla sina markörer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Spelplan att lägga markörer på.

Spelet kan göras tydligare med en spelplan med större rutor och multilink eller Duplo som staplas på varandra.

Elevers dokumentation

Använd elevbladet till dokumentationen och låt eleverna svara på frågorna som står på det, antingen själva eller med relevant anteckningsstöd. De kan svara på ett separat papper, i sin anteckningsbok eller digitalt.

Elevblad Gissningar och resultat

Ni ska kasta två tärningar 30 gånger och sedan addera summan av tärningarnas tal, men först ska ni gissa hur det går.

Gissning

1. *Gissa först* hur många gånger varje summa kommer att förekomma och skriv gissningarna i rutorna i den första tabellen.

Summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Antal kast												

Tärningskast

2. Slå de båda tärningarna och addera talen.

Gör ett streck som markering i rutorna i översta raden för varje summa som kommer upp. Det ska bli 30 streck totalt.

Summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Antal kast												

3. Räkna ihop strecken för varje summa och skriv med siffror i den nedersta raden.

Frågor

1. På hur många sätt kan man få summan 4?
Skriv ner de olika kombinationerna eller rita dem.
2. Är det någon av summorna 1–12 som inte är möjlig att få?
Vilken i så fall? Förklara varför.
3. Vilken av summorna har högst sannolikhet?
Fundera på varför.

Elevblad Tabell

Summa	Kombinationer
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Frågor

1. Vilken summa har högst sannolikhet? Varför?
2. Vilken summa har minst sannolikhet? Varför?
3. Hur många olika kombinationer finns det?
4. Hur stor är sannolikheten att få summan 7?
5. Hur stor är sannolikheten att få summan 1?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Kollegial kompetensutveckling

Statistik och sannolikhet & Elevers dokumentation

Enskild läsning

När du läser texterna, reflektera och anteckna

- vilka begrepp i *Statistik och sannolikhet* som du känner dig bekväm med och vilka du skulle behöva fördjupa din kunskap om
- vilka av de föreslagna dokumentationssätten som är praktiskt genomförbara för dina nuvarande elever.

Kollegial inledande träff

1. Diskutera era medtagna anteckningar. Börja med den första punkten och låt var och en läsa upp sina anteckningar. Diskutera särskilt begreppen som har att göra med sannolikhet eftersom aktiviteterna har det innehållet. Fortsätt med den andra punkten och jämför era erfarenheter av elevers dokumentationer och hur de kan utvecklas.
2. Samtala om vilken aktivitet som passar era elevgrupper bäst. Genomför tillsammans vald aktivitet. Är alla ense om vad aktiviteten går ut på? Diskutera vilka förberedelser som behövs, till exempel val av material, vad ni tror att eleverna kommer att göra och vad de kan lära sig.

Under och direkt efter lektionen

Genomför den planerade aktiviteten.

Anteckna några kommentarer från elever som visar hur de uppfattar sannolikhet.

Kollegial uppföljande träff

Läs upp och diskutera de olika elevkommentarer som ni har antecknat.

- Vad säger det om vad elever kan om sannolikhet och vilka konsekvenser kan det få i vardagliga sammanhang?

Påbörja en gemensam tankekarta (mindmap) om sannolikhet som kan ligga till grund för er fortsatta undervisning.

