

Nyfikenhet, lust och fantasi

Mönster i matematiken

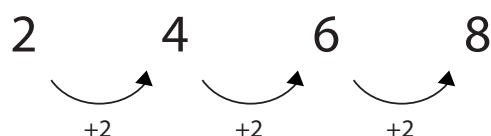


figur 1

figur 2

figur 3

figur 4

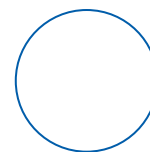
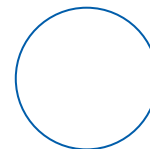
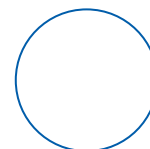
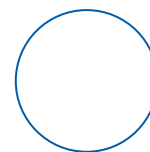
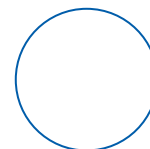
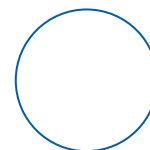
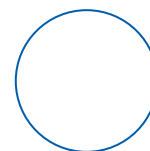
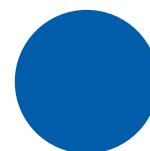


Ämnesområde: Mönster med grejer

Årskurs 1–3: Hitta mönsterdelen

Årskurs 4–6: Dynamiska mönster med grejer

Årskurs 7–9: Från mönster till formel



Nyfikenhet, lust och fantasi

Matematik har under lång tid utvecklats ur praktiska behov och genom människors nyfikenhet och lust att utforska sin omvärld. Med kunskaper i matematik ökar möjligheterna för alla att förstå vardagen och därigenom fatta självständiga beslut. Förmågor som resonemang, kommunikation och problemlösning utvecklas då elever både enskilt och tillsammans med andra möter matematik i kreativa och estetiska aktiviteter där de ges förutsättningar att använda många olika uttrycksformer.

Nyfikenhet och lust

Nyfikenhet och lust att lära är grunder för skolans verksamhet. Skolan ska stimulera elevernas kreativitet, nyfikenhet och självförtroende att lära, utforska och arbeta både självständigt och tillsammans med andra. Redan små barn drivs av nyfikenhet och en inre lust att utforska och förstå sin omvärld. De börjar tidigt ta reda på vad som döljer sig bortom det som finns framför ögonen, det uppenbara. De skaffar sig erfarenheter som bygger en inre intuitiv förståelse. Underförstått finns frågor om vad som finns i, ovanför, under och bakom eller om antal som en, två, många. Vuxna och andra barn uppmärksammar dem på det som finns runt omkring. De utmanar nyfikenhet och spontant utforskande genom att visa på företeelser som barnen ännu inte själva skulle upptäcka och pratar om det som uppmärksammas. När barn har funktionsnedsättningar som gör att de på egen hand inte kan ge sig i väg och undersöka sin närmiljö blir det viktigt att omgivningen hjälper dem att utforska. Kan barnet inte ta sig till en miljö får miljön komma till barnet. Skolan kan bidra till att dessa elever får erfara fler möten med omgivningen och på annorlunda sätt än när motsvarande möten sker i hemmet och på fritiden.

Att fantisera och föreställa sig

Vi behöver använda vår fantasi för att hitta lösningar på såväl vardagliga som matematiska problem. Ordet fantasi kommer ur grekiskans *phantasia*, som betyder 'synligblivning', 'anblick', 'föreställning'. Nationalencyklopedin beskriver fantasin som en nyckel till att utveckla sinnen och att den utvecklas i samspelet med andra. Fantasin hjälper till att ge mening åt upplevelser och förståelse för kunskap. Det vi erfar med våra sinnen, rör vid, ser och hör smälter samman till inre bilder, som inte har verklighetens begränsningar. Det handlar om förmågan att skapa inre bilder, känslor och föreställningar.

Mot bakgrund av fantasins betydelse är det rimligt att fråga sig hur förmågan att fantisera uppstår. Är den medfödd? Kan vi påverka den, ge den spelrum och optimal utveckling? Lev Vygotskij menar att fantasin är beroende av individuella erfarenheter, vilket talar mot att fantasin skulle vara medfödd. Sannolikt finns möjligheten att utveckla förmågan hos alla människor. Samtidigt visar forskning att elever inom det autistiska spektret har en nedsatt förmåga till fantasi, speciellt i samband med lek (Jordan, 1999, 2003) och att detta även medför större svårigheter att förstå symboler och metaforer (Wing & Gould, 1979). För att fantasin ska kunna utvecklas behövs erfarenheter, stimulans och utmaningar i en omgivning med tilltro till elevernas möjligheter.

På senare år har teorier om embodied cognition (Lakoff & Johnson, 2003; Littlemore, 2019) kommit att påverka hur världen kan förstås. Lakoff och Núñez (2000) menar att matematiken i grund och botten bygger på fyra kroppsliga metaforer, det vill säga fyra erfarenheter som vi människor gör och som vi använder för att förstå tal som i sig själva är abstrakta. Dessa metaforer är i korthet: tal som objekt i en behållare, tal som konstruktioner vi kan bygga ihop och ta isär, tal som punkter och sträckor, tal som rörelser längst en väg. Genom att utgå från erfarenheter av att lägga i och ta bort saker från en behållare, att bygga ihop och plocka isär, att mäta och jämföra avstånd och att röra sig framåt och bakåt skapar eleven en grund för att förstå och föreställa sig tal och operationer i matematiken. Rucinska, Fondelli och Gallagher (2019) lyfter särskilt fram dessa teorier som viktiga för att förstå autistiska barns föreställningsvärld. De menar att förmågan att föreställa sig är grundat i hur vi uppfattar världen genom våra sinnen och i hur vi rör oss och upplever den. Världen härstammar från motoriska aktiveringar, inte bara kognitiva och semantiska operationer som den traditionella skolan ofta utgår från.

När elever använder laborativa matematikmaterial behöver de kunna föreställa sig vad det representerar. De behöver få uppleva representationen själva, fysiskt med sina kroppar och sinnen.

Till exempel när träfigurer eller plastnallar åskådliggör hur eleverna kan delas in i smågrupper behöver elever med autistiska drag få en explicit koppling till rent fysiska erfarenheten av uppdelning av barn i grupper. Vissa studier tyder på att även digitala hjälpmedel där eleven tar del av en virtuell verklighet (Virtual Reality) kan bidra till autistiska barns utveckling av fantasi och symbolförståelse (Herera et al., 2008).

Då elever får utmaningar, genomför uppdrag och löser uppgifter åt en fantasifigur, till exempel en docka, frigörs energi och risken att misslyckas flyttas över på den som äger problemet, det vill säga fantasifiguren. På så sätt exponeras det egna självförtroendet mindre. Fantasin kan aktiveras när eleverna berättar om figurens eller sina egna drömmar och önskningar. Läraren kan utmana eleverna att beskriva allt fler detaljer på olika sätt. "Varför tror du dockan gjorde så?" För elever inom det autistiska spektret kan det vara mer produktivt att rikta frågorna mindre till vad som sker inne i huvudet, vad man tror eller tänker, och mer till den aktiva händelsen "Vad gör dockan? Varför gör dockan så?". Utan stimulans, adekvata utmaningar och aktivt arbete utvecklas varken intellekt eller fantasi. I matematisk problemlösning blir frågor om varför, eller vad som händer om något inträffar, naturliga att ställa och enklare att besvara med hjälp av fantasins kraft.

Matematiken är en lek

Metaforen "matematik är en lek" är en kraftfull idé att tillvarata i undervisningen (Ganelius, 1966). Lekar och spel fungerar som modell för verkligheten, har en struktur, engagerar en, två eller flera deltagare och har logiska regler som måste hanteras tydligt och klart. Att förutsäga och ställa hypoteser är en viktig del i spel och lekar, liksom i matematiken. Gåtor, paradoxer och andra tankelekar har stor betydelse för utvecklingen av matematiskt tänkande.

Ganelius utvecklar sin idé och menar att det som av många betraktas som självklara sanningar, inte är något annat än från början fritt valda regler för lek med tecken. Matematiker har i sin nyfikna lek, eller om vi föredrar att kalla det forskning, frågat sig: Vad händer om...? De har skrivit hypoteser, undersökt och fått fram resultat. Hypoteser har bekräftats eller förkastats.

Lek karakteriseras av hypotetiskt tänkande där det finns likheter med verkligheten. I leken får fantasin fritt spelrum eftersom verklighetens begränsningar inte finns. Deltagarna bestämmer vad som gäller, vilka regler de har att förhålla sig till och hur de ska hantera avvikelser från dem. Det som varit tillfälliga överenskommelser i en lek, har i olika sammanhang formaliserats i regler. Leken har bytt skepnad och blivit ett spel.

För att lära matematik är fantasin både en bundsförvant och en förutsättning. I och genom fantasin kan eleven tänja gränser och skapa nytt kunnande. Alan Bishop pekar också på intressanta likheter mellan vad som kännetecknar leken och det som är utmärkande för matematiken, där en kort sammanfattning är följande:

- att föreställa sig vad som kan hända, att låtsas, till exempel att sängen är en båt, liksom att gissa och uppskatta, är att tänka hypotetiskt och en början till abstrakt tänkande
- att använda drag ifrån verkligheten har med matematisk modellering att göra
- att formulera och tillämpa regler, kriterier och procedurer och att hantera "överträdelser" från det man kommit överens om i leken motsvarar hur matematikregler formuleras och tillämpas
- att undersöka och utforska företeelser i olika sammanhang karaktäriserar problemlösning.

Spel – en matematisk aktivitet

Människor som lever på geografiskt skilda platser eller under olika tidsepoker har ändå utvecklat liknande aktiviteter som ger upphov till matematiskt tänkande och språk, visar Bishop (1997). Matematiska aktiviteter, som spel av olika slag, har ofta en social dimension. De genomförs i samverkan och dialog eller i tävlingssammanhang där de tävlande försöker överglänsa varandra i strategier, snabbhet eller mental styrka. Genom historien har mänskligheten utvecklat förutsättningar och strategier samt enats om regler och undantag att förhålla sig till, bland annat något så vanligt förekommande som turtagning. Det finns bestämmelser och regler om i vilken ordning man ska göra olika saker, vem som ska börja, vad som händer om en deltagare gör fel och så vidare. Många barn med intellektuella funktionsnedsättningar trivs när de inser att det finns

tydliga och klart uttalade regler. Överenskommelser betraktas ibland som absoluta sanningar och i matematiken finns många sådana exempel. Eftersom dessa regler finns kan aktiviteter ofta starta direkt när deltagarna bestämt sig för vad de vill göra. De behöver inte hamna i konflikt när någon gör fel, i stället kan de vända sig till regelverket. I spelliknande aktiviteter rör sig deltagarna i en fiktiv värld, ofta med likheter i det vardagliga livet, men där deltagarna kan ta ut svängarna och reflektera över och pröva vad som händer utan att behöva hantera konsekvenser i verkligheten. Bishop menar att detta kan vara grunden till hypotetiskt tänkande: Om jag går nu så hinner jag till bussen. Om jag får en boll till så har jag fyra stycken.

Mönster

Många matematiker definierar matematik som en vetenskap om mönster.

En matematiker, likt en målare eller poet, är en skapare av mönster. Om hans mönster är mer beständigt än deras är det för att det skapas av idéer.

(Hardy, 1992, s. 84, fritt översatt)

I en klassisk bok från samma epok lyfter Keith Devlin fram mönster redan i titeln: *Mathematics: the science of patterns – the search for order in life, mind, and the universe*. Mönster skapar ordning och ger struktur i en värld som annars kan te sig kaotisk och osammanhängande. Inom matematikdidaktik har en australiensisk forskargrupp genomfört omfattande studier kring förskolebarns medvetenhet om mönster och struktur (Mulligan et al., 2010; Mulligan & Mitchelmore, 2009; Mulligan et al., 2006). De har funnit att barn som inte kan identifiera enkla mönster och strukturer ofta upplever stora svårigheter med att lära sig matematik. Forskargruppen kallar denna förmåga för AMPS, som står för Awareness of Mathematical Patterns and Structure. De menar att mönster är grunden för all matematik och definierar det på följande sätt:

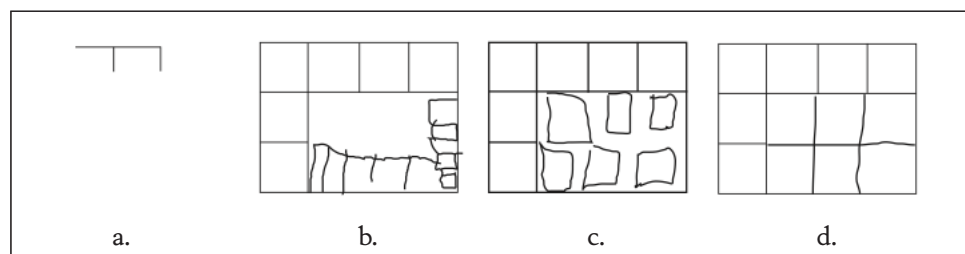
Mönster är förutsägbara regelbundenheter som innehåller antal, rymd eller mått.

Struktur är hur olika delar i ett mönster är organiserade och relaterade till varandra.

Definitionerna innebär att struktur kan ses som en beskrivning av hur ett mönster är konstruerat. Vi kan se, höra eller förnimma ett mönster, och vi kan beskriva mönstrets struktur med hjälp av ord, bild och matematiska symboler. En lärdom från forskargruppen är att AMPS går att träna, och att det därför är viktigt att tidigt fånga upp elever med låg AMPS. Författarna menar att alla barn följer den här utvecklingen men i olika hastighet. Vissa barn med intellektuell funktionsnedsättning kan behöva extra mycket träning för att se strukturer, medan andra ser dem bättre och snabbare än typiskt utvecklade barn.

Ett enkelt exempel på hur de testar AMPS är att visa barnet ett rutmönster med 3 x 4 rutor, sedan ta bort bilden eller täcka över en del av den och be barnet rita vad som fanns på bilden. Författarna urskiljer fyra faser i utvecklingen av AMPS:

- barnets teckning påminner inte alls om ett rutnät
- barnet ritat rutor längs kanten men ingenting i mitten
- barnet ritat rutor men inte i en sammanhängande struktur
- barnet återskapar strukturen (Mulligan & Mitchelmore, 2009).



Fyra faser i utvecklingen av AMPS.

Statiska och dynamiska mönster

I många matematiska aktiviteter ska deltagarna upptäcka, hantera och uttrycka likheter och skillnader. Ofta handlar det om att kunna förutse vad som kommer att hända. Mönster är nära kopplat till likheter och skillnader och är ett exempel på matematiskt innehåll som kan användas för att stimulera nyfikenhet, lust och fantasi.

Att arbeta med mycket enkla mönster lämpar sig särskilt väl för elever med stor intellektuell funktionsnedsättning. Man kan exempelvis arbeta med att elever får erfara regelbundenheter i rörelsemönster, att vaggas i takt till musik, att klappa eller röra en kroppsdel i en viss sekvens, gärna i kombination med ramsor som anger rytm. Att genom olika sinnen få upptäcka likheter och olikheter som har att göra med antal eller form kan också göras på mycket en grundläggande nivå (Bergström, 2010).

Förmågan att upptäcka likheter och skillnader är avgörande för att kunna erfara strukturer och mönster. Att beskriva det man upptäckt, till en början med vardagsspråk och på sikt med matematikens ord och symboler, är en del i matematiklärandet. Vygotskij (1999) talar om dialektiken mellan språk och tanke. Det vi kan berätta om så att andra förstår, har vi själva förstått. Vid arbete med mönster är det oftast en hjälp att fokusera på vilken som är den minsta beståndsdelen i mönstret, den del, det element, som används för att bygga upp strukturen. Vi kan kalla det för den minsta mönsterdelen. Arbetet med matematiska mönster där det finns en mönsterdel som antingen upprepas eller som förändras på ett regelbundet sätt innebär att strukturen erfars och kan beskrivas på olika nivåer:

1. upptäcka mönstret, erfara det och kunna återskapa, upprepa eller fortsätta det
2. beskriva med ord hur mönstret bildas
3. se och beskriva ett samband mellan antalet delar i figuren och figurens ordningsnummer
4. kunna beskriva sambandet med algebraiska symboler, i ett uttryck eller en formel.

På nivå 1 och 2 sker arbetet med mönster mycket grundläggande. På nivå 3 och 4 innebär det ett något mer avancerat arbete som leder till algebra och funktioner.

Statiska upprepande mönster

I vardagen omges vi av mönster och strukturer. Mönster kan vara dekorationer och arbetsmanualer, de kan också beskriva cykliska förlopp som årstider, veckans dagar eller dag och natt. Människor har rutiner och de flesta gör samma saker, på samma sätt och i samma ordning varje dag. Sådana upprepade, oförändrade förlopp är uttryck för statiska mönster, vilka också finns i kläder, på tapeter, i danser och så vidare. Såväl hemma som i skolan kan elever utforska och skapa upprepande mönster med olika saker och skilda egenskaper: kottar och löv, små och stora stenar och pinnar, leksaker, klossar med olika form, läskburkar, koppar och fat, sig själva och kamrater. Eleverna behöver även möta mönster gestaltade genom andra uttrycksformer som rörelser, ljud, ramsor, rytmer, händelser, bilder och symboler för att befästa förståelsen för begreppet mönster.

Det som utmärker statiska mönster är att sekvensen upprepas utan att förändras. För att fortsätta ett påbörjat mönster måste vi studera hur det ser ut eller låter för att upptäcka dess delar och ordningen på dem. Den första frågan gäller hur mönstret fortsätter. För att eleverna ska upptäcka strukturen i statiska mönster behöver de utmanas på ett systematiskt sätt. Det kan vara nödvändigt att starta med ett mönster med en enda del som upprepas



och att diskutera hur det ska fortsätta och motivera varför. Antalet komponenter får sedan öka successivt



Det kan vara enklare att öka antalet av en komponent i en mönsterdel innan mönstret utökas med fler komponenter



Talmönster – både statiska och dynamiska

Aritmetiken är också rik på samband och mönster. Talen i talraden följer ett mönster. Oavsett var vi börjar i den är talet som följer ett mer än starttalet och talet före ett mindre: 3, 4, 5, 6 ... Detta mönster kan beskrivas med ord, men också algebraiskt, $(n + 1)$ eller $(n - 1)$, där n står för det tal vi utgår från. Beroende på vilka kunskaper eleverna har, kan talmönstren som tas upp vara olika komplexa. Här följer några exempel:

1, 2, 3, 4 ...

Mönstret är enkelt för den som kan och ser att det hela tiden ökar med ett. Är det självklart för alla elever?

2, 4, 6, 8 ...

Här är mönstret $+2$. Att kunna skutträkna grupper av föremål, som två, fem eller tio i taget underlättar i olika sammanhang och är en grund för multiplikation.

90, 80, 70 ...

Talföljder har alltid två riktningar. Här ser vi en del av en talföljd. Ofta följer vi mönstret i läsriktningen, det vill säga åt höger. Vilket är mönstret? Hur ser fortsättningen ut åt vänster?

I vissa talmönster förändras relationen mellan talen systematiskt och dynamiskt.

1, 2, 4, 7, 11 ...

Här kan vi se att ökningen är 1, 2, 3, 4, 5 ... $1 + 1 \ 2 + 2 \ 4 + 3 \ 7 + 4 \ 11 + 5 \dots$

1, 1, 2, 3, 5, 8 ...

Detta mönster kallas ibland för Fibonaccis talföljd och beskriver förhållanden som återfinns på många sätt i naturen. Mönstret byggs upp av att ett tal i talserien är lika med summan av de två föregående talen.

1, 5, 13, 25, 41 ...

Multiplar av talet fyra beskriver förändringen. $1 + 4 \ 5 + 8 \ 13 + 12 \dots$

1, 4, 9, 16 ...

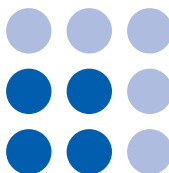
Detta mönster kan beskrivas på flera sätt. Ett sätt är att ökningen ökar med nästa udda tal: 3, 5, 7, 9 och så vidare. En annan beskrivning är att se talen i mönstret som kvadrattal, det vill säga talet gånger sig självt: $1^2, 2^2, 3^2 \dots$



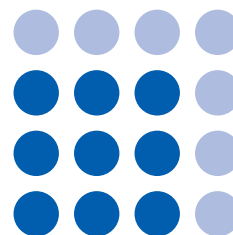
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Kvadrattal: här kombineras de båda sätten att erfara mönstret.

Lästips och förslag på kompletterande aktiviteter

För att hitta artiklar från Nämnaren, sök på ncm.gu.se/nbas.

Strumpor, symboler och strukturer – algebra i förskolan och i förskoleklassen
Maria Alkhede & Camilla Björklund, Nämnaren 2017:1

Skoj med tvättsvampar!
Rimma Nyman, Nämnaren 2018:3

Vårt arbete med Tänka, resonera och räkna i förskoleklass
Lena Wiklund, Nämnaren 2023:1

Olivias klänning
Cecilia Nyström, Nämnaren 2011:2

Algebra för lågstadiet
Åsa Brorsson, Nämnaren 2012:3

Mönsterproblem i dubbel bemärkelse
Astrid Karlsson, Nämnaren 2011:2

Garagebyggen – Matematisk progression i mönsterproblem
Peter Fredrikson & Rimma Nyman, Nämnaren 2019:2

Ta till en tabell
Kerstin Hagland, Nämnaren 2010:2

Generaliserad aritmetik – en bro mellan aritmetik och algebra
Kajsa Bråting & Lars Madej, Nämnaren 2017:4

Sagt & gjort: Talföljder med multilink
Nämnaren 2017:1

Uppslaget: Mönster med stickor
Nämnaren 2001:1

Strävor

För att hitta aktiviteter från Strävorna, sök på ncm.gu.se/stravorna.

Talserier
Genom arbete med talserier kan elever öva upp färdighet i att hantera tal. Aktiviteten kan också förbereda för ett algebraiskt tänkande.

Undersök ett mönster
I denna aktivitet får eleverna undersöka mönster och beskriva dem med egna ord. De kan också gå vidare till att beskriva mönstren med formler.

Fiskebodar
Aktiviteten ger övning i att upptäcka mönster och att beskriva hur mönstret växer med hjälp av vardagliga ord, tabell och formel. Hitta ett generellt samband mellan antalet figurer och antalet stickor och upptäck fördelen med att använda en matematisk formel.

Barn och matematik



0–3 år

Barn och matematik

I de tre broschyrerna *Barn och matematik* 0–3 år, 3–5 år samt 6 år, finns inspiration för vårdnadshavare som vill reflektera över hur barn lär sig matematik och det ges exempel på möjligheter att stimulera, engagera och utmana barns lärande. Barn vill utforska omvärlden och de försöker tolka och förstå sammanhang de är involverade i, bland annat med hjälp av matematik. Studier visar att vårdnadshavare har en avgörande betydelse för barnens lärande och i broschyrerna visas situationer där matematik kan lyftas fram i hemmiljön. Dessa tillfällen finns i de flesta hem, men för att matematiken ska upplevas och förstås av barnen, måste de vuxna samtala, benämna, utmana och utvidga barnens erfarenheter.

Broschyrerna finns fritt nedladdningsbara på bestallning.ncm.gu.se.

Barn och matematik



3–5 år

Barn och matematik



6 år

Mönster i matematiken

Det finns flera anledningar att undervisa om och med mönster. När en elev kan uppfatta mönster, och kan upptäcka vad som utgör en mönsterdel, underlättar det vardagen eftersom inte varje del i ett mönster behöver läras för sig. Upprepningar och struktur skapar trygghet och förutsägbarhet. Vi vet att efter dag följer natt, veckodagar och årstider återkommer i ett regelbundet mönster och maträtter blir oftast bäst om recept följs i rätt ordning. I matematiken förekommer många mönster, såsom jämna och udda tal och mönster i additions-, subtraktions- och multiplikationstabellerna. I förlängningen handlar det om att se matematiska samband som underlättar vid hantering av tal och som ger en grund för att kunna föra algebraiska resonemang och göra generaliseringar. Mönster kan också tillföra estetiska upplevelser som kan berika en kreativ ämnessamverkan mellan exempelvis matematik och ett praktisk-estetiskt ämne.

Progression

I följande aktiviteter finns en progression från att elever ser och använder ett fåtal föremål i ett upprepande statiskt mönster till att de får bekanta sig med växande dynamiska mönster som kan leda till generell aritmetik och formler.

Ämnesområde: Mönster med grejer

Mönster läggs med olika föremål så att eleverna ges möjlighet att upptäcka och fullfölja enkla statiska mönster samt ges möjligt att urskilja och beskriva mönsterdelen.

Årskurs 1–3: Hitta mönsterdelen

Genom att fullfölja enkla statiska mönster, göra dem längre och kortare, går det att upptäcka och beskriva mönsterdelar.

Årskurs 4–6: Dynamiska mönster med grejer

När elever kan uppmärksamma hur dynamiska mönster växer ger det erfarenheter av att följa givna förutsättningar, vilket är grunden för att formulera regler för olika mönster.

Årskurs 7–9: Från mönster till formel

Elever får prova att arbeta med dynamiska mönster hela vägen från att lägga dem med konkret material till att mönstret sammanfattas i en formel.

Mönster med grejer

Mönster är ett omfattande begrepp. Ett mönster kan skapas av fysiska föremål, bilder, ljud, smaker, taktila upplevelser, händelser, orsakssamband och mycket annat. Takten i älsklingsången och ordningen på vardagens händelser uppvisar mönster liksom spjälor i ett staket, ytor på tyger, tapeter och stenläggningar. Syftet med den här aktiviteten är att uppmärksamma elever på skillnader mellan olika föremål och ge dem möjlighet att upptäcka och fullfölja enkla statiska mönster och att urskilja och beskriva mönsterdelen.

Material

Välj material som passar elevernas finmotoriska förutsättningar samt deras ålder och intressen. Använd i möjligaste mån saker som eleverna använder till vardags, det vill säga inte bilder på föremål. Välj föremål som tydligt skiljer sig från varandra, till exempel gula plastspadar och blå mjuka bollar alternativt gula bananer och röda äpplen, eller anpassa materialvalet avseende greppvänlighet, hårdhet, möjlighet att åstadkomma ljud, färg, storlek, ytstruktur, doft, smak et cetera.

Introduktion

Ställ fram en låda med två olika slags föremål, 7–10 likadana av varje slag. Här exemplifierat med badankor och leksaksbilar, och låt gärna en fantasifigur, här kallad Filuren, resonera med eleverna.

Låt Filuren ställa föremål på rad, först 3 ankor följt av 3 bilar.



– Jag har ställt ankorna först i raden för jag tycker de är sötast, säger Filuren.

Låt eleverna hjälpa till och ställa fram resten av föremålen, varje sort för sig.

– Men jag vet ett annat sätt, säger Filuren. Vi ställer först en anka, sedan en bil, en anka, en bil ...

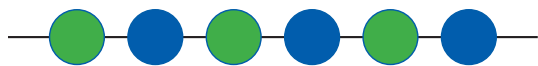


– Hur blir det då?

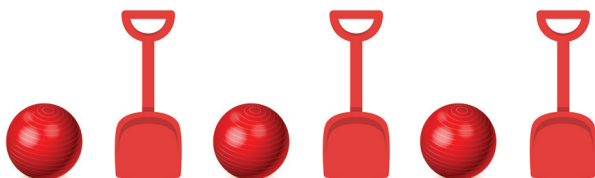
Låt eleverna hjälpa Filuren att ordna den nya raden. Samtala om ordet varannan.

Beskrivning

Ta fram utvalt material till ett mönster i taget. Lägg varannan två eller tre gånger. Variera bara en egenskap – färg, form eller storlek.



Olika färg
(Exempelvis lika stora vaddkolor trädde på en piprensare)



Olika form
(Exempelvis röda bollar och röda spadar)



Olika storlek
(Exempelvis logiska block med samma färg och form men olika storlek)

1. Samtala med eleverna om vilken färg, form eller storlek nästa föremål ska ha för att mönstret ska fortsätta på samma sätt. Nästa igen och så vidare. Låt eleverna beskriva mönstret eller ge alternativ som de får välja mellan.
2. Tydliggör vilka två föremål som utgör mönsterdelen.
3. Låt eleverna göra egna mönster där mönsterdelen består av två olika föremål.
4. Filuren funderar: Finns det fler sätt att ställa sakerna på? Titta tillsammans på olika sätt att ställa föremålen två och två eller två av en sort och en av den andra sorten.
5. En ny fundering från Filuren: Hur kan det se ut om mönstret får fortsätta åt båda hållen?
6. Diskutera om exempelvis träkulor på en piprensare kan sättas ihop till en ring så att mönstret löper oavbrutet. I så fall hur? Samtala om vad det beror på.

Anpassning

För att upptäcka hur mönstret upprepar sig kan det för någon elev vara nödvändigt att starta med en enda komponent. Ställ fram likadana föremål, ett i taget, framför eleven. Vad ska komma sedan? Utveckla genom att i en rad med likadana föremål byta ut ett av dem mot ett helt annorlunda föremål. Låt Filuren fråga: Vad är tokigt i den här raden?

Elevers dokumentation

Mönster är tacksamma att dokumentera och ett av de enklaste sätten är att fotografera mönsters framväxt steg för steg. Använd den teknik som eleverna är vana vid eller som ni vill introducera. Var noga med att välja ut och spara all dokumentation på ett tillgängligt sätt. Märk med datum.

Diktering där eleven formulerar det läraren ska skriva är också ett grundläggande sätt för elevers dokumentation, det kan till exempel göras i samband med att ni väljer foton. Låt om möjligt eleverna parvis se på vilka skillnader de upptäcker mellan föremålen. Hur kan eller vill de beskriva ett mönster? Hur ser mönsterdelen ut? Skriv på blädderblock, interaktiv skrivtavla eller annat sätt så att alla kan se meningarna och det är möjligt att spara det dikttrade till ett senare tillfälle.

Använd elevernas dokumentation i den fortsatta undervisningen. Vad kan eleven nu? Vad kan utvecklas? Vad verkar eleven nöjd eller missnöjd med?

Hitta mönsterdelen

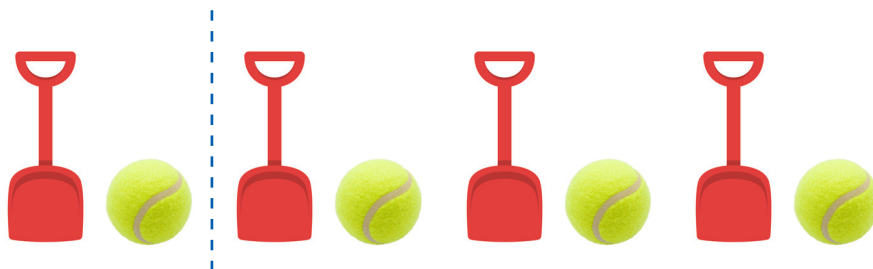
Att uppfatta mönster och vad som är mönsterdelen är en grundläggande matematisk kompetens. Elever kan behöva många erfarenheter av mönster och arbete med mönster för att träna upp den kompetensen. Syftet med den här aktiviteten är att ge elever möjlighet att fullfölja enkla statistiska mönster och att beskriva mönsterdelar.

Material

Välj material som passar elevernas motoriska förutsättningar samt deras ålder och intressen. Använd i möjligaste mån föremål från deras vardag, det vill säga inte bilder på föremål.

Introduktion

Lägg sakta ett statistiskt mönster där mönsterdelen består av två olika föremål:



Mönsterdelen är en röd plastspade och en tennisboll.

- Låt eleverna beskriva mönstret.
Vad heter föremålen, vilken färg har de, vad kommer först ...
- Hur kan mönstret fortsätta? Visa!
- Hur kort går det att göra mönstret?

Ifrågasätt om det går att lägga mönstret om man bara har spadar eller bara tennisbollar. När eleverna är överens om att den kortaste delen av mönstret består av en röd spade och en tennisboll går det att förstå hur mönstret ska fortsätta. Använd ordet mönsterdel.

Beskrivning

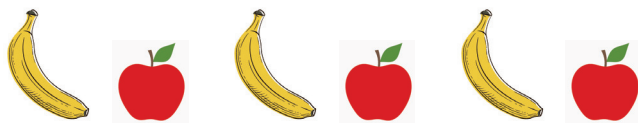
Ge varje elev eller elevpar ett påbörjat statistiskt mönster, en förebild, att följa. Tänk noga igenom vilka förutsättningar som sakerna i sig ger. Olika exempel på statistiska mönster visas på nästa sida.

Det kanske enklaste statistiska mönstret består av två olika föremål (spade och boll; äpple och banan; glas och mugg). Andra mönster består av föremål där en egenskap finns i två varianter (storlek: stora och små muttrar; färg: blå och gula multilink).

Låt varje elev eller elevpar fortsätta lägga och beskriva många "varannan-mönster" med olika material. Kan de hitta mönsterdelen?

Ett mönster måste inte byggas på från vänster till höger. Utgå från ett föremål som är placerat i mitten, låt mönstret växa i rad åt två håll men bara med sammanlagt två olika föremål, former, färger eller annan egenskap. Kan eleverna hitta mönsterdelen? Hur blir mönstret om sakerna läggs två och två istället för ett och ett?

Fortsätt med ett statistiskt mönster med allt fler komponenter.



Statiskt upprepande mönster.
Mönsterdel: banan, äpple



Statiskt upprepande mönster.
Mönsterdel: juiceglas, kaffemugg



Statiskt upprepande mönster med
föremål i två olika storlekar.
Mönsterdel: stor mutter, liten mutter



Statiskt upprepande mönster med
föremål i två olika färger.
Mönsterdel: blå multilink, gul multilink



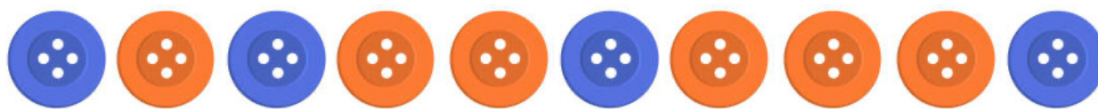
Ett ganska komplext statiskt upprepande
mönster med tre komponenter.
Mönsterdel: insexnyckel, två muttrar, sax

Sammanfattningsvis

1. Samtala med eleverna om vilken färg eller vilken form nästa föremål ska ha för att mönstret ska fortsätta på samma sätt.
2. Låt eleverna beskriva mönstret eller ge alternativ som de får välja mellan.
3. Låt eleverna göra egna mönster där mönsterdelen består av två eller flera olika delar.
4. Hur ser det ut om mönstret får fortsätta åt båda hållen?
5. Diskutera om länkarna kan sättas ihop till en ring så att mönstret löper oavbrutet. I så fall hur? Samtala om vad det beror på.

Utveckling

Det finns oändligt många sätt att utveckla och variera denna aktivitet. Övergå exempelvis från statiska till dynamiska mönster som på nästa sida.



Två varianter av samma dynamiska mönster.

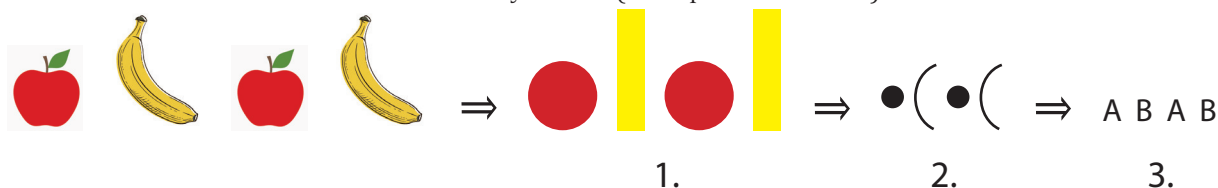
Samtala om hur mönstret växer. Knapparnas dynamiska mönster åskådliggörs enbart genom knapparnas färg. Förutom det dynamiska mönstret där antalet vita tärningar ökar med en mellan de röda tärningarna finns ett statiskt mönster avseende tärningarnas prickar.

Låt eleverna skapa egna mönster som de ger som utmaningar till varandra. "Så här tänker jag – hur tänker du?"

Elevers dokumentation

Låt varje elev välja ett av sina lagda mönster:

1. rita av och färglägg (alternativ: använd stämplar eller schabloner)
2. ersätt teckningarna med informella symboler
3. fortsätt eventuellt till formella symboler (exempelvis **A B A B**).



Extra utmaning

Hur ser mönstret **A B B A B B** ut?

Lägg mönstret.

Dynamiska mönster med grejer

Syftet med den här aktiviteten är att uppmärksamma elever på dynamiska (växande) mönster och ge erfarenheter av att följa givna förutsättningar samt att på sikt ge förutsättningar att formulera regler för olika mönster. Med hjälp av en enklare variant av ett fyrfältsblad används olika representationer för att visa och beskriva hur ett mönster växer. Kommunikation är en viktig del i undervisningsaktiviteten liksom att ge elever möjlighet att resonera, både med sig själva och med andra. Genom samtal och frågor formas språket med både vardagliga och matematiska ord.

Material

Använd ett pedagogiskt material som multilink eller välj material som passar de enskilda elevernas finmotoriska förutsättningar samt deras ålder och intressen. Använd i möjligaste mån konkreta föremål, det vill säga inte bilder på föremål. Erbjud stämplor eller schabloner till elever som har svårt att rita. Eleverna behöver var sitt fyrfältsblad, gärna förstorat till A3. Före sidan med kopieringsunderlag till det tomma fyrfältsbladet finns ett ifyllt blad som stöd för lärarens förberedelser.

Introduktion

Inled gemensamt med att klappa ett dynamiskt mönster med händerna:
Gör en klapp, pausa, två klapp, pausa, tre klapp, pausa och så vidare.

Efter hand som eleverna upptäcker mönstret kan de följa med i klappandet. Låt inte antalet klappar öka allt för långt, börja hellre om från en klapp ett par gånger. Låt de elever som vill beskriva mönstret.

Beskrivning

Dela in tavlan i fyra fält och dela ut fyrfältsblad till eleverna. De fylls i gemensamt under lektionens gång.

Börja med fältet KONKRET

Visa starten av det växande mönstret med multilink. Stanna till vid varje ny figur och skriv "figur #".



figur 1



figur 2



figur 3



figur 4

Dynamiskt mönster med multilink.

– Hur många multilink ska det vara i nästa figur? I nästa? Fortsätt lägga mönstret.

Låt eleverna lägga mönstret med lämpligt material på sitt eget fyrfältsblad under rubriken KONKRET.

Fortsätt med fältet BILD

Resonera tillsammans hur man kan rita de två–tre första figurerna, rita dem på tavlan och låt eleverna rita av på sitt eget papper, alternativt använda stämpel eller schablon. Låt sedan eleverna rita eller åskådliggöra kommande figurer på egen hand i rutan BILD.

- Hur ritade du nästa figur?
- Hur visste du hur många du skulle rita?
- Har någon gjort på samma sätt?
- Har någon gjort på något annat sätt? Hur tänkte du?

Fortsätt med fältet TAL

Resonera om hur man kan skriva mönstret med tal. Skriv de två–tre första på tavlan och låt sedan eleverna försöka på egen hand med att först skriva av talen på tavlan under TAL och sedan fortsätta.

- Vilka tal skrev du?
- Hur visste du att det talet skulle komma efter 6?
- Är det fler som har skrivit samma tal?
- Vilket tal ska skrivas efter 8? ... 10? ... 12?

Fortsätt med fältet ORD

Hur växer mönstret? Låt eleverna försöka beskriva språkligt hur mönstret växer, till exempel "det ökar med två". Skriv in det under ORD. Be fler elever försöka sätta ord på hur mönstret växer. Skriv gärna flera meningar.

Formulera en rubrik

Samtala om vad aktiviteten handlar om och formulera tillsammans en RUBRIK till fyrfältsbladet.

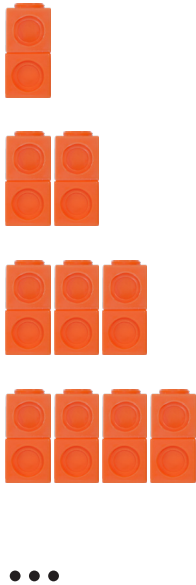
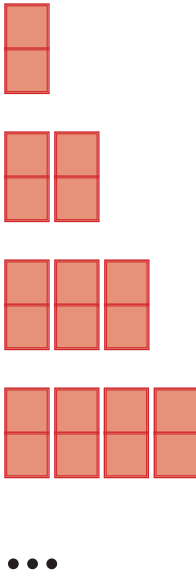
Avsluta aktiviteten med att klappa mönstret tillsammans.

Elevers dokumentation

Dokumentationen genomförs gemensamt under lektionen.

Fortsatt arbete

Nu har eleverna fått prova att använda en enklare variant av ett fyrfältsblad. Bygg nya mönster som ni diskuterar tillsammans i gruppen men låt eleverna arbeta mer självständigt med dokumentationen.

RUBRIK <i>Mönstret växer med två hela tiden</i>	
KONKRET 	BILD 
TAL 2 4 6 8 10	ORD Mönstret ökar hela tiden med två. <i>eller</i> I första figuren är det två multilink. I andra figuren är det fyra multilink. I tredje figuren är det sex multilink. <i>eller</i> Om man tänker att två multilink är ett par så är det dubbelt så många multilink som det är par.

Fyrfältsblad

RUBRIK	
KONKRET	BILD
TAL	ORD

Från mönster till formel

Undervisning om och med mönster handlar bland annat om att låta elever uppmärksamma matematiska samband som grund för algebraiska resonemang. Syftet med den här aktiviteten är att uppmärksamma elever på dynamiska mönster, att ge erfarenheter av att följa givna förutsättningar samt att beskriva mönster algebraiskt. Här används ett fyrfältsblad som leder hela vägen från ett mönster med konkreta föremål till en abstrakt formel. Kommunikation är en viktig del i aktiviteten liksom att ge elever möjlighet att resonera, både med sig själva och med andra. Genom samtal och frågor formas språket med både vardagliga och matematiska ord.

Material

Använd markörer eller välj annat material som passar elevernas finmotoriska förutsättningar samt deras ålder och intressen. Eleverna behöver varsitt fyrfältsblad, gärna förstorat till A3. Förbered även ett motsvarande fyrfältsblad på tavlan. Före sidan med kopieringsunderlag till det tomma fyrfältsbladet finns ett ifyllt blad som stöd för lärarens förberedelser.

Introduktion

Starta med en talkör:

2, 4, 6, 8, 10 ... 10, 8, 6, 4, 2

Avgör utifrån elevernas respons när det är dags att vända.

Beskrivning

Visa att de fyra rutorna på tavlan motsvarar elevernas fyrfältsblad. Arbeta sedan tillsammans med ett fält i taget.

Börja med fältet BILD

Konstruera det dynamiska mönster som syns i rutan BILD. Eftersom mönstret fort blir långt är det enklast att skapa figurerna lodrätt under varandra istället för att rita dem vågrätt efter varandra. Sätt upp en figur i taget på tavlan. Om eleverna ska använda markörer kan det vara en fördel att använda större rundlar som går att sätta upp på tavlan. Det visar att det är antalet föremål som är det viktiga, inte hur stora de är.

– Hur växer mönstret?

Låt eleverna fundera en stund enskilt och låt några berätta vad de ser. Be eleverna lägga egna markörer precis som i exemplet. Samtala om vad ordet figur betyder. Låt sedan eleverna rita av markörerna under rubriken BILD på sitt fyrfältsblad.

Fortsätt med fältet TAL

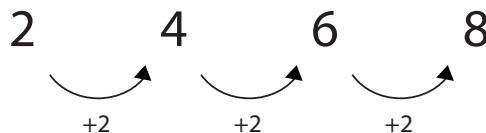
Titta på mönstret på tavlan och låt eleverna beskriva med ord och tal hur mönstret växer.

– Vilken talserie bildas?

Fyll gemensamt i tabellen under TAL i fyrfältsbladet.

Visa eleverna strategin att skriva det som

$2 = 1 \cdot 2$, $4 = 2 \cdot 2$ och så vidare.



Fortsätt med fältet ORD

Låt eleverna språkligt beskriva hur mönstret växer, exempelvis "hela tiden blir det två fler än i den förra figuren". Skriv föreslagna meningar på tavlan. Låt eleverna skriva av meningarna i fältet för ORD. Som en extra utmaning kan de som vill försöka komma på ytterligare en mening.

Avsluta med fältet FORMEL

Det är utmanande för elever att komma fram till en generell formel för mönstret. Det främsta syftet med att tillsammans arbeta fram en formel är att visa dem ett exempel på en verklighet bakom ett uttryck som $2n$, det handlar inte om att de redan första gången ska förstå arbetsgången.

Arbeta i mycket små steg. Starta i en mening, förenkla och gör den allt mer generell. Samtala om varje steg.

Ta upp konventioner till diskussion, exempelvis att multiplikationstecken inte alltid skrivs ut, att konstantterm skrivs före variabel et cetera.

Visa hur $2n$ kan användas för att ta reda på hur många markörer som behövs till vilken figur som helst:

Figur nummer 5 läggs med $2 \cdot 5 = 10$ markörer

Figur nummer 20 läggs med $2 \cdot 10 = 20$ markörer

Figur nummer 87 läggs med $2 \cdot 87 = 174$ markörer

Tabellen i fältet TAL kan utökas till en generell nivå:

Figur nr	Antal markörer
①	$2 = ① \cdot 2$
②	$4 = ② \cdot 2$
③	$6 = ③ \cdot 2$
④	$8 = ④ \cdot 2$
⑤	$10 = ⑤ \cdot 2$
⑩	$? = ⑩ \cdot 2$
①	$? = ① \cdot 2$

Utökning av tabellen till en generell nivå.

Anpassning

Låt elever som inte kan skriva direkt i fyrfältsbladet få göra på de sätt som de brukar då klassen arbetar med texter. Underlätta inte enbart för att det ska gå fortare; att få tid att på något sätt skriva själv ger eleven tid att tänka och smälta nya intryck.

Fortsättning

Ge eleverna andra talserier och låt dem undersöka hur mönstret fortsätter. Vilka relationer finns det mellan talen? Hur kan det beskrivas med bild, tal, ord och formel i ett fyrfältsblad?

Elevers dokumentation

Denna dokumentation genomförs gemensamt. Vid fortsatt arbete med fyrfältsblad kan det vara en ambition att de olika fälten ska fyllas i allt mer självständigt.

Ifyllt fyrfältsblad till läraren

Bild	Tal																		
Figur 1: ●● Figur 2: ●●●● Figur 3: ●●●●●● Figur 4: ●●●●●●●● Figur 5: ●●●●●●●●●● Figur 6: ...	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Figur nr</th><th>Antal markörer</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>①</td><td>$2 = ① \cdot 2$</td></tr> <tr> <td>②</td><td>$4 = ② \cdot 2$</td></tr> <tr> <td>③</td><td>$6 = ③ \cdot 2$</td></tr> <tr> <td>④</td><td>$8 = ④ \cdot 2$</td></tr> <tr> <td>⑤</td><td>$10 = ⑤ \cdot 2$</td></tr> <tr> <td> </td><td> </td></tr> <tr> <td> </td><td> </td></tr> <tr> <td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>	Figur nr	Antal markörer	①	$2 = ① \cdot 2$	②	$4 = ② \cdot 2$	③	$6 = ③ \cdot 2$	④	$8 = ④ \cdot 2$	⑤	$10 = ⑤ \cdot 2$						
Figur nr	Antal markörer																		
①	$2 = ① \cdot 2$																		
②	$4 = ② \cdot 2$																		
③	$6 = ③ \cdot 2$																		
④	$8 = ④ \cdot 2$																		
⑤	$10 = ⑤ \cdot 2$																		
Ord	Formel																		
Mönstret ökar hela tiden med två. I första figuren är det två markörer. I andra figuren är det fyra markörer. I tredje figuren är det sex markörer. <i>eller</i> Om det är många figurer behövs dubbelt så många markörer. <i>eller</i> Om jag vill veta hur många markörer som går åt till en viss figur tar jag figurens nummer gånger två. <i>eller</i> Antalet figurer gånger två ger antalet markörer.	Antalet figurer gånger två ger antalet markörer. För att veta antalet markörer tar jag antalet figurer gånger två. Antalet figurer gånger två. Ant fig · 2 Ant · 2 $n \cdot 2$ $2 \cdot n$ $2n$ (Ta upp konventioner till diskussion, exempelvis att multiplikationstecken inte alltid skrivs ut, att konstantterm skrivs före variabel et cetera.																		

Fyrfältsblad

Bild	Tal																				
	<table border="1"><thead><tr><th data-bbox="877 463 1034 512">Figur nr</th><th data-bbox="1034 463 1276 512">Antal markörer</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></tbody></table>	Figur nr	Antal markörer																		
	Figur nr	Antal markörer																			

Kollegial kompetensutveckling

Nyfikenhet, lust och fantasi & Mönster

Enskild läsning

När du läser texterna, reflektera och anteckna

- vad som utmanar dina tankar om att väcka elevernas kreativitet, nyfikenhet och fantasi för matematik i undervisningen
- hur arbete med mönster i undervisningen kan genomföras för att väcka elevernas kreativitet och nyfikenhet samt tilltro till sin egen förmåga att lära matematik
- varför mönster är viktigt att arbeta med för att eleverna ska förstå andra områden inom matematik. Vilka matematikområden hänger samman med mönster?

Kollegial inledande träff

1. Diskutera era medtagna anteckningar. Ta en punkt i taget och låt var och en läsa upp sina anteckningar. Öppna därefter upp för en kort diskussion innan ni går vidare till nästa fråga. Avsluta samtalet med att resonera om hur ni kan utveckla er undervisning om mönster för att skapa ytterligare kreativitet, nyfikenhet och lust.
2. Samtala om vilken aktivitet som passar era elevgrupper bäst. Genomför tillsammans vald aktivitet. Är alla ense om vad aktiviteten går ut på? Diskutera vilka förberedelser som behövs, till exempel val av material, vad ni tror att eleverna kommer att göra och vad de kan lära sig. Resonera även om hur kreativitet och nyfikenhet kan ta sig uttryck i aktiviteten.

Under och direkt efter lektionen

Genomför den planerade aktiviteten.

Anteckna vad i undervisningen som ledde till att eleverna fick möjlighet att vara kreativa och/eller nyfikna. Hur tog det sig uttryck, det vill säga vad hände i undervisningen och vad gjorde eleverna?

Fotografera eller samla in ett eller ett par elevarbeten som särskilt visar på kreativitet och/eller nyfikenhet.

Kollegial uppföljande träff

Delge varandra era anteckningar från undervisningen och hur elevernas kreativitet och nyfikenhet kom till uttryck under arbetet med mönster.

- Titta gemensamt på de medtagna elevarbetena och diskutera även här kreativitet och nyfikenhet.
- Titta på alla medtagna elevarbeten en gång till men diskutera denna gång progressionen i elevernas kunskap om mönster.

