

## Punkter och cirklar

När vi talar om lärande av ett ämnesområde så kan vi knappast över-skatta vikten av en bra lärare. Alla har vi förhoppningsvis berättelser om goda lärare som vi mött under vår utbildningstid. Det kan vara föreläsare eller andra som fått oss att inse något speciellt och jag vill berätta om min matematiklärare på dåvarande Götabergsskolan, byggd 1906 med 30 klassrum och 956 elever fördelade på alla årskurser. Götabergsskolan heter nu International High School of the Gothenburg Region: IHGR. Jag gick där från årskurs 1 till årskurs 6 under åren 1959–1965. Vår lärare var en liten kortvuxen kvinna som vi elever kallade Fröken Ewaldz. Hon undervisade oss i flera ämnen, men det var just i matematik som jag fick speciella upplevelser.

Sverige och skolan var annorlunda då. Den så kallade 40-timmarsveckan hade ännu inte vunnit laga kraft och även vi elever gick i skolan på lördagar under mina fyra första skolår. Det var inte på något sätt så hemskt som det kanske låter. Bredvid Götabergsskolan låg Landalaskolan, numera Aschebergsgymnasiet, byggd 1892 och med egen badinrättning i källaren med många små badkar och en mindre bassäng där vi elever fick bada. Få hade badrum hemma, standard var en kallvattenvask i köket och utedass på gården. Även stora barnfamiljer bodde oftast i ett rum och kök. I andra och tredje klass fick jag bada i skolan trots att vi hade badkar hemma. Om någon påpekade att de hade badkar hemma så fräste badtanten tillbaka: "Så säger alla smutsiga pojkar." Vi fick även avlägga simkun-nighetsprov i bassängen i Landalaskolans källare.

Under större delen av året fanns det varma hönökakor att köpa på Hönöbageriet på Molinsgatan. Dessa bakades i en vedeldad ugn. En del hönökakor blev därför lite ojämna eller lite för mycket gräddade och såldes billigt till elever i området. På vårarorna fanns det en glassfabrik i Landala som var omtalad för sin goda glass. Folk kom från hela Göteborg för att handla glass där – den godaste glass jag någonsin har ätit.

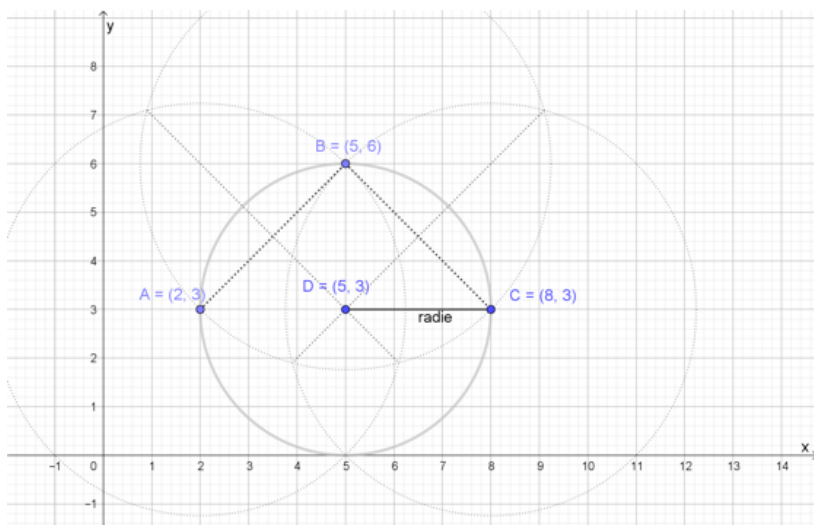
Lektionerna på lördag förmiddag ägnades åt matematik. Ofta var det konstruktionsgeometri på schemat. I årskurs 2 och årskurs 3 lärde vi oss konstruera mittpunktsnormaler, bisektriser, rätvinkliga trianglar och liknande med passare och linjal. Vi lärde oss också att markera punkter i koordinatsystem. En lördag på vårterminen i årskurs 4 visade Fröken Ewaldz hur vi med elementär konstruktionsgeometri kunde bestämma den cirkel som gick genom tre bestämda punkter i koordinatsystemet. Jag har inte kvar uppgiften annat än i minnet men jag tror att Fröken Ewaldz markerade tre punkter på tavlan i ett koordinatsystem och berättade att det fanns en cirkel som gick genom dessa tre punkter. Vi skulle hitta den cirkeln. Kanske bestämdes min yrkesbana av den uppgiften som jag upplevde som både vacker och intressant.

Uppgiften som Fröken Ewaldz gav oss löd så här:

Om vi har tre punkter i planet givna och om inte punkterna ligger längs en rät linje, så finns det en cirkel som går genom dessa tre punkter. Konstruera cirkeln.

## Geometrisk lösning

Den geometriska metoden att lösa problemet som jag mötte i årskurs 4 går ut på att välja två av punkterna (A och B i bilden) och dra ett linjesegment mellan dem. Genom linjesegmentets mittpunkt drar vi en ortogonal linje mot linjesegmentet (vilket vi kallade mittpunktsnormal i fjärde klass). Den första ortogonala linjen tas fram genom de två stora cirklar som är slagna med hjälp av punkterna A och B, med A respektive B som mittpunkt. Den eftersökta cirkelns mittpunkt kommer då att ligga någonstans på vår nya linje. Genomför vi denna konstruktion för ett annat par av punkter (B och C i bilden) så får vi cirkelns mittpunkt där våra linjer skär varandra (D i bilden). Från mittpunkten till någon av punkterna på cirkelranden kan vi markera radien. Vi fick givetvis rita för hand och konstruera mittpunktsnormalerna med hjälp av passare och linjal, men med Geogebra får det följande utseende.



## Algebraisk lösning

En algebraisk metod för att lösa problemet kräver viss insikt om Pythagoras sats, om algebraisk hantering av variabler och om ekvationssystem och lösningsmetoder för dessa. Om vi vet koordinaterna för de tre punkterna kan vi beskriva cirkeln med följande ekvation:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ . Här är punkten som ges av  $(a,b)$  cirkelns mittpunkt medan  $r$  står för cirkelns radie,  $x$  och  $y$  är koordinaterna för en godtycklig punkt på cirkelns rand.

Eftersom de tre punkterna måste befinna sig på cirkelranden kan vi använda ett ekvationssystem för att bestämma cirkelns ekvation. Låt oss säga att vi har följande tre punkter som befinner sig på cirkelranden: A = (2,3), B = (5,6) och

$C = (8, 3)$ . Givet dessa tre punkter med koordinaterna  $(x, y)$  kan vi definiera ett ekvationssystem. För punkterna A, B och C får vi

$$\begin{aligned}(2-a)^2 + (3-b)^2 &= r^2 & \Leftrightarrow & a^2 - 4a + b^2 - 6b + 13 = r^2 \\(5-a)^2 + (6-b)^2 &= r^2 & \Leftrightarrow & a^2 - 10a + b^2 - 12b + 61 = r^2 \\(8-a)^2 + (3-b)^2 &= r^2 & \Leftrightarrow & a^2 - 16a + b^2 - 6b + 73 = r^2\end{aligned}$$

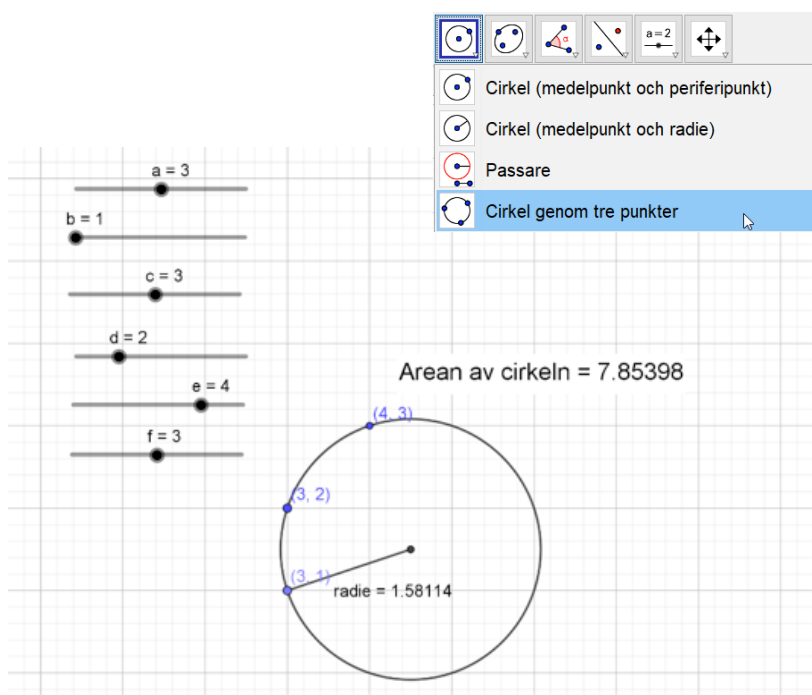
Ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre variabler är lösbart för alla variabler. Om vi löser detta ekvationssystem så får vi  $r = \pm 3$ ,  $a = 5$  och  $b = 3$ .

## Lösning med hjälp av datorprogrammering

Eftersom detta skrivs nu när programmering är aktuellt i svensk skola tar jag chansen att programmera konstruktionen i två olika miljöer: Geogebra och Python. De båda systemen klarar problemet utan svårigheter men kommandostrukturen ser olika ut.

### Geogebra

Geogebra går att programmera med glidare för punkterna, vilket skapar möjlighet att påverka situationen och utforska olika fall. Dessutom har Geogebra ett inbyggt menyalternativ för just vår konstruktion. Geogebra erbjuder också areaberäkning och bestämning av radie för en sådan cirkel.



## Python

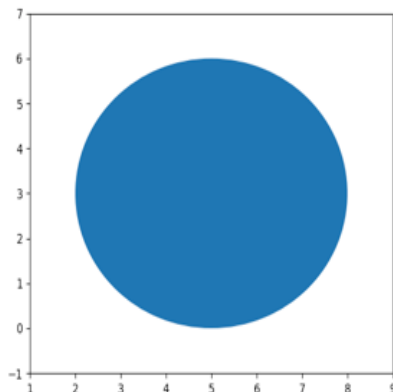
I Python kan vi tillåta att användare matar in tre punkter men här har jag gjort detta på raden `center, radie = define_circle((2, 3), (5, 6), (8, 3))`

```
# Copyright Thomas Lingefjärd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
fig, ax = plt.subplots()
def define_circle(p1, p2, p3):
    # Denna definition tar emot tre punkter. Om de tre punkterna
    # ligger på en linje returneras (None, infinity).
    temp = p2[0] * p2[0] + p2[1] * p2[1]
    bc = (p1[0] * p1[0] + p1[1] * p1[1] - temp) / 2
    cd = (temp - p3[0] * p3[0] - p3[1] * p3[1]) / 2
    det = (p1[0] - p2[0]) * (p2[1] - p3[1]) - (p2[0] - p3[0]) * (p1[1]
- p2[1])
    if abs(det) < 1.0e-6:
        return (None, np.infinity)
    # Cirkelns centrum
    cx = (bc*(p2[1] - p3[1]) - cd*(p1[1] - p2[1])) / det
    cy = ((p1[0] - p2[0]) * cd - (p2[0] - p3[0]) * bc) / det
    radie = math.sqrt((cx - p1[0])**2 + (cy - p1[1])**2)
    return ((cx, cy), radie)
# Nu skickar vi punkterna
center, radie = define_circle((2, 3), (5, 6), (8, 3))
if center is not None:
    circle = plt.Circle(center, radie)
    plt.gcf().gca().add_artist(circle)
    area = radie*radie*math.pi
    print("\nCirkelns area = %.2f" %area, "areaenheter")
    print("Cirkelns radie = %.2f" %radie, "längdenheter")
# Koordinatsystem
plt.xlim(1, 3*radie)
plt.ylim(-1, 7)
plt.show()
plt.savefig("Cirkel genom tre punkter.png")
```

[Repl.it](#) svarar:

Cirkelns area = 28.27 areaenheter

Cirkelns radie = 3.00 längdenheter

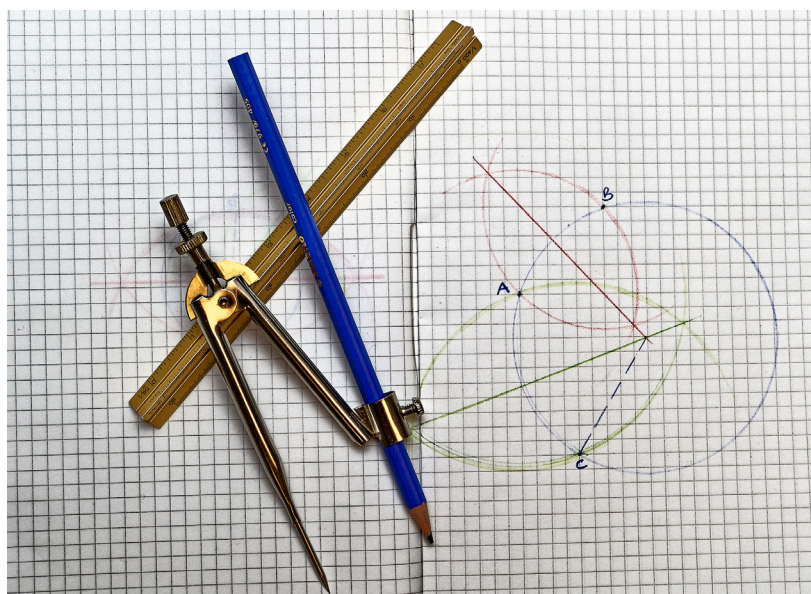


## Lärarens betydelse

Dagens moderna hjälpmedel fanns inte när jag gick i skolan. Men bra lärare har nog alltid funnits. Det är viktigt att vara medveten om att alla lärare kan sträva efter att tända stjärnor i elevers ögon. För mig var matematik roligast när jag gick i årskurs 4–6. Därefter försvann konstruktionsgeometrin. I högstadiet blev det mycket repetitivt räknande och ganska få upptäckter. Jag kommer inte heller ihåg min matematiklärare i årskurs 7–9. Konstigt.

Genom att granska mer än 500 000 studier genomförde John Hattie på University of Melbourne metaanalyser där han rankade olika typer av influenser på elevers lärande och prestationer. Hattie fann att den påverkan som lärare har är större än andra faktorer som ofta får större genomslag i den allmänna debatten, såsom antal elever, digitalisering, individualisering, urval relativt prestation eller schemadetaljer. Det visade sig att de influenser som slår ut alla andra faktorer är relaterade till lärare. Av betydelse är dels de förväntningar som lärare visar för en elev, dels det lärarkunnande som läraren visar i sin undervisning.

Jag hoppas att många av er lärare som läser denna artikeln kan inspirera era elever till att få intresse för matematik. Även om verktygen är annorlunda idag så är upptäckter och insikter något som gör avtryck i våra hjärnor. Kanske kan ni göra era elever samma tjänst som Fröken Ewaldz gjorde mig.



Du hittar Geogebra- och Pythonfilerna på följande adresser:

<https://www.geogebra.org/classic/wbceb9ng>

<https://repl.it/@ThomasLinge/Cirkel-genom-tre-punkter>