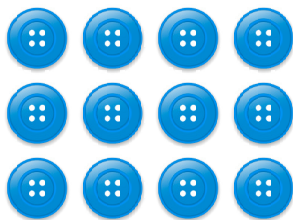


Små, mystiska heltal

Primtal kan vara både besvärliga och till stor nytta, menar författaren. De är grunden för faktorisering, en många gånger viktig kunskap vid problemlösning. Här visas hur rektangeltal kan bestämmas och hur samma tillvägagångssätt också kan omsättas i fler dimensioner för att exempelvis finna lådtal.

Om man har några knappar på ett bord kan man försöka lägga dem i en rektangel. Som rektangel godkänns inte en lång linje, rektangelns sidor måste vara åtminstone två knappar. Om det är omöjligt att göra en rektangel med samtliga knappar, om det alltid blir någon knapp över, så är antalet knappar ett *primtal*. Men om det går bra att lägga en rektangel så har vi hittat en faktorisering av talet i två andra tal.

Primtal är besvärliga tal. Man kan inte dela dem med något, eller faktorisera dem. Å andra sidan är de grundläggande beståndsdelar. Om man har sex knappar kan man lägga dem i en rektangel med $2 \cdot 3$ knappar, där båda sidorna är primtal, beståndsdelarna i talet 6. Indirekt är primtalen mycket användbara. De gör något med andra tal! Har man 12 knappar kan man lägga dem som *två olika* rektanglar, minsann. Vi kan lägga dem som $3 \cdot 4$ och $2 \cdot 6$.



3×4



2×6

Inga fler rektanglar än dessa två är möjliga med 12 knappar. Det går inte att få två olika rektanglar för något tal mindre än 12. För 10, 9 och 8 knappar finns det bara ett sätt: $2 \cdot 5$, $3 \cdot 3$ respektive $2 \cdot 4$. Rektangeln $2 \cdot 4$ är samma som $4 \cdot 2$, bara sedd från en annan vinkel.

Alltså är 12 speciellt jämfört med tal mindre än 12: det finns två olika rektanglar. Det kan vi kalla att 12 har *rektangeltal* 2. Då har 4, 6, 8, 9 och 10 rektangeltal 1. Alla primtal har rektangeltal 0, för man kan göra exakt 0 rektanglar av dem. Vi kan skriva "12 har rektangeltal 2" kortare, exempelvis som $A(12) = 2$. Då har vi också $A(6) = 1$. Och $A(p) = 0$ om p är ett primtal.

Vi kan också se de två rektablarna med 12 genom att faktorisera i primtal. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ kan skrivas i *två* faktorer som $2 \cdot 6$ eller $3 \cdot 4$. Två olika faktoriseringar, två olika rektanglar. Hur blir det om vi undersöker andra tal? Hur är det med 14 knappar? Med 16? Med 24? Med 27?

Nästa fråga som man kan undersöka: Vilket är det lägsta talet som har rektangel-tal 3? Alltså, där man kan göra tre olika rektanglar? Hur många knappar behöver man? Man får hoppas att det går att hitta knapparså de inte behöverslitas loss från kläderna. Efter lite testande visar det sig vara 24, eftersom $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Tre olika rektanglar! Alla lägre tal ger högst två olika rektanglar. Primtal är alltså en stor hjälp för att undersöka hur 24 kan delas upp i faktorer. De verkar i bakgrunden, i kulisserna. För att sammanfatta:

- ♦ Alla primtal har rektangeltal 0.
- ♦ Alla tal med *exakt två faktorer som är primtal* har rektangeltal 1. Och bara de talen. Det minsta talet med rektangeltal 1 är 4.
- ♦ Det minsta talet med rektangeltal 2 är 12.
- ♦ Det minsta talet med rektangeltal 3 är 24.

Hur fortsätter detta? Är det alltid bara faktorer 2 och 3 i sådana tal, om de är minst? Vilka tal har rektangeltal 4? Vilket är minst av dem?

Det kan bli svårt att hitta tal som har rektangeltal 4 med knappar, istället kan det vara lättare med faktorer. Det visar sig bli $A(36) = 4$, för $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$. Fyra rektanglar, där den sista är en enkel sorts rektangel: en kvadrat.

Här är också en undersökningsmetod. Från $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ tar man först det minsta talet gånger resten ($2 \cdot 18$), sen det näst minsta man kan bilda ($3 \cdot 12$). På det sättet arbetar man sig uppåt så långsamt det går, för att inte hoppa över någon möjlighet, ända till det första talet som riskerar att bli lägre än det andra. Det räcker att undersöka upp till roten ur talet.

Efter $A(36) = 4$ kommer $A(60) = 5$, som är det minsta med rektangeltal 5. Eftersom $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ har vi nu med en faktor 5. Så det är inte längre enbart 2:or och 3:or.

Man kan också undersöka särskilda serier av tal. Hur många rektanglar kan man göra av talen 2, 4, 8, 16, 32, 64 och så vidare, som bara består av faktorer 2? Jo, då har vi $A(2) = 0$ (primtal), $A(4) = 1$, $A(8) = 1$, $A(16) = 2$, nämligen $2 \cdot 8$ och $4 \cdot 4$. Det betyder att $A(16) = A(2^4) = 2$. Sedan får vi att $32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, så $A(32) = A(2^5) = 2$. Resultatet är att $A(2^n) = \lfloor n/2 \rfloor$. Denna typ av hakparentes avrundar talet till närmast lägre heltal, så vi får 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ... när n ökar från $n = 1$. Denna parentes kallas ibland golvfunktion, för den sänker talet till närmaste heltal. På samma sätt är $A(3^n) = \lfloor n/2 \rfloor$ och $A(5^n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Man kan se att det handlar inte bara om *antalet primtal* i faktoriseringen. För $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ har rektangeltal 3, men $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ har rektangeltal 2. Ett annat exempel är 30 som också har rektangeltal 3, eftersom $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$. Man kan visa att ett tal som bara består av 2:or och 3:or har $A(2^n 3^k) = \lfloor (n+1)(k+1)/2 \rfloor - 1$. Parentesen $\lfloor x \rfloor$ är en så kallad takfunktion: dess värde är närmast större heltal till x . Vi har samma formel om vi byter ut 2 och 3 mot två andra primtal.

Det blir lite svårare med tal som består av tre primtal. Och fyra primtal. Men den väsentliga delen är produkten av antalet primtal av varje sort, som produkten $(n+1)(k+1)$ i formeln ovan, fast med fler faktorer. Formeln kommer från alla möjligheter för det första primtalet gånger alla möjligheter för det andra. Då räknar vi dubbelt, därav $/2$. Men vi måste ta bort fallet med både $n = 0$ och $k = 0$, därav termen -1 .

Vi kan kalla de *minsta* talen som ett visst antal rektanglar kan konstrueras med för *rektangelrika tal*. De talen tillåter fler rektanglar än alla tal hittills. Vi fann att de fem första rektangelrika talen är 4, 12, 24, 36 och 60.

I tre dimensioner – lådor

Om man byter ut knapparna mot små tärningar kan man stapla dem på varandra i flera våningar och göra lådor – rätblock. Vi har då en dimension till: höjd. Fortfarande måste varje sida vara minst två tärningar lång. Hur många tärningar behövs då? Med hur många tärningar kan man göra två olika lådor?

Jo, då består förstas den minsta av 8 tärningar, eftersom $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. I tre dimensioner behöver vi förstås tre faktorer. Med 8 tärningar kan man bara göra 1 låda. Här kan vi tala om *lådatal* i stället för rektangeltal. Så lådtalet för 8 är 1. Vi kan skriva det $B(8) = 1$. Med talet 24 går det att göra två olika lådor, $2 \cdot 3 \cdot 4$ och $2 \cdot 2 \cdot 6$. Så vi vet att $B(24) = 2$, samtidigt som $A(24) = 3$. Dessutom är 8 och 24 de två första lådriska talen. Alla tal med endast två primtalsfaktorer har lådtal 0. Så under 16 är 8 det enda talet som inte har lådtal 0.



Man kan undersöka vilket lådtal till exempel $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ har med en liknande metod som vi använde för rektangeltal. Man väljer först de två minsta talen, det ger $2 \cdot 2$ och sen ökar man det andra talet så lite som möjligt, så de tre talen alltid är växande. Alltså: $48 = 2 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 2 \cdot 4 \cdot 6$. När de inte går att öka det andra talet mer tar man närmast större förstatal, och fortsätter på det sättet så att talen är växande (de får vara lika). Det ger $48 = 3 \cdot 4 \cdot 4$. Sedan finns inga fler. Så $B(48) = 4$. På detta sätt får man med varje möjlighet en gång. Detta visar att det inte är säkert att lådtal alltid är mindre än rektangeltal. Vi såg nyss att $B(48) = 4$. Men $A(48) = 4$, för $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$.

I fyra dimensioner

Man kan göra samma sak i högre dimensioner med tärningar, som ger generaliserade lådtal. Det blir lite mer jobb, och flera tärningar behövs. I fyra dimensioner kan man göra två exakt likadana (tredimensionella) lådor. Här är den ena den första nivån i den nya dimensionen, och den andra är den andra nivån. Med en tredje exakt likadan låda har man en tredje våning i den fjärde dimensionen.

Räkнемässigt är det nog enklare än med tärningar – det är bara att faktorisera. Talet $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ är det minsta tal som tillåter en fyrdimensionell låda. Antal fyrdimensionella lådor kan vi beteckna med C , så $C(16) = 1$ och $C(n) = 0$ om n är mindre än 16. $C(48) = 2$ eftersom $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$. Så 48 måste vara det första talet med fyrdimensionellt lådtal som är 2.

I fem dimensioner, och sex

Lägger man identiska tredimensionella lådor i en rektangel, kanske $2 \cdot 3$ identiska tredimensionella lådor, så svarar detta mot fem dimensioner. Här med 2 nivåer i dimension fyra och 3 nivåer i dimension fem. I fem dimensioner är $D(32) = 1$ och $D(96) = 2$, de första på nivå 1 och 2.

Gör man ett antal kopior av nyss nämnda rektanglar av lådor så har vi sex dimensioner. Antalet kopior är antalet nivåer i den nya dimensionen. Här är $E(64) = 1$, $E(192) = 2$, det är de lägsta talen med generaliserat lådtal 1 respektive 2.

Rektangelrika tal och superrika tal

I Nämnaren 2013:3 kan man läsa om superrika tal. Det är tal som har många delare. Ett tals rikedom är summan av alla delare, utom talet självt, delat med talet. Rikedom för till exempel 6 är $(1 + 2 + 3)/6 = 1$ och eftersom 6 är delbart med 1, 2 och 3 är dessa tal *delare* av 6. Och av 6, men det tar vi alltså inte med.

När rikedom är 1 kallas talet perfekt. Under antiken bevisade Euklides egenskaper för perfekta tal. Även talet 28 är perfekt: $(1 + 2 + 4 + 7 + 14)/28 = 1$. Många tal är rikare, ett exempel är 12: $(1 + 2 + 3 + 4 + 6)/12 = 4/3$.

Primtalen är alla fattiga. 7 till exempel har alltså rikedom $(1 + 0)/7$. Men vad är ett superrikt tal? Jo, det är ett tal som är rikare än alla tal som är mindre än det. Det visar sig att de första superrika talen är 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 360, 720, 840. Talet $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ är det första som innehåller en faktor 7. Talet 60 är det första med en faktor 5.

Men nu har vi även funnit rektangelrika tal, som börjar med 4, 12, 24, 36, 60. De är alltså alla även superrika! Hur fortsätter denna serie? Här bjuder matematiken på en överraskning. Efter $A(60) = 5$ kommer $A(192) = 6$ och $A(120) = 7$ för minimala tal (alltså, inget mindre tal än 192 har A lika med 6). Va? 192 är rektangelrikt med 6 rektanglar? Och sedan ett mindre tal, 120? Rektangelrikedom gör språng!

Jag trodde givetvis detta var ett räknepel, men kalkylen håller efter dubbel- och trippelkoll. Helt klart: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 = 4 \cdot 30 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$. Så $A(120) = 7$.

Inget tal mindre än 192 ($= 2 \cdot 96 = 3 \cdot 64 = 4 \cdot 48 = 6 \cdot 32 = 8 \cdot 24 = 12 \cdot 16$) har rektangelantal 6. Kanske är 120 lite för bra på att tillåta rektanglar, så 6 rektanglar blir överhoppade. Detta betyder att 192 är rektangelrikt men inte superrikt. Men vi har sett att det i alla fall är sexdimensionellt lådrikt.

Jag skrev artikeln om superrika tal när jag fyllde 60. I år fyller jag 72, men $A(72) = A(60) = 5$, så 72 är utkonkurrerat av 60 även när det gäller rektangelrikedom.

Motsatser till primtal

Superrika tal och rektangelrika tal är olika sätt att beskriva motsatser till primtal, nämligen tal med hög delbarhet. Det är tal som tillhör många multiplikationstabeller. Notera att vi gjorde undersökningen hela tiden med hjälp av primtal. Som nämnts tidigare jobbar de ständigt bakom scenen.

Från sumererna som levde i nuvarande Irak för cirka 4000 år sedan har vi fått räkning i basen 60, som gett oss 60 sekunder på en minut och 60 minuter på en timme. Vi vet inte varför sumererna valde det. Kanske för 60 är ett tal med särskilt hög delbarhet? Eller kanske för att antal dagar på ett år är nära 360. Som är ett superrikt tal och delbart med 60.

Då kanske det är på sin plats att meddela att 360 har $A(360) = 10$, $B(360) = 17$, $C(360) = 11$, $D(360) = 3$, $E(360) = 1$ och $F(360) = 0$. Dessutom är dess rikedom $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 15 + 18 + 20 + 24 + 30 + 36 + 40 + 45 + 60 + 72 + 90 + 120 + 180)/360$, som är 2,25. Det är många delare.

LITTERATUR

- Lennerstad, H. (2013). *Hitta de superrika talen*. Nämnaren 2013:1.
Ulin, B. (2005). *Rika tal – och utfattiga*. Nämnaren 2005:4.