

Dialoger om problemlösning

Dialoger om problemlösning var en artikelserie i Nämnaren 1998–2009 vars syfte var att ge lärare matematiska problem att arbeta med och samtala kring tillsammans med kollegor.

A v tradition avslutas sedan länge varje nummer av Nämnaren med en *Problemaavdelning*. Problemlösning är kärnan i alla matematikaktiviteter och en tidskrift som handlar om matematikundervisning måste naturligtvis kunna erbjuda intressanta och gärna lite ovanliga problem. Utöver Problemaavdelningen fanns under tio år en artikelserie med temat *Dialoger om problemlösning*, eller kort och gott DPL. Nämnarens dåvarande redaktion startade artikelserien i nummer 4, 1998. De gjorde det i samarbete med gästprofessorerna Diana Lambdin och Frank Lester som bland annat hade goda erfarenheter av DPL i USA.

Syftet var "att ge intresserade och nyfikna läsare möjligheter att arbeta med problem och utbyta personliga reflektioner om tankar och ansträngningar med andra likasinnade". Artikelförfattarna uppmuntrade läsaren att grubbla på problemen tillsammans med kollegor på skolans personalrum eller andra mötesplatser, alternativt att diskutera dem på internet eller vid problemlösningsskvällar. Det fanns en förväntan och önskan att DPL skulle ha potential för att skapa en "gemenskap av reflekterande problemlösare".

Lärare bör ha samma möjlighet som sina elever att regelbundet engagera sig i riktig problemlösning. Det är svårt att hålla sig i god matematikform om man inte ägnar sig åt att praktisera matematik, det vill säga ägnar sig åt problemlösning. Problemlösare lär sig mer matematik när andra personer som arbetar med samma problem kommenterar hans eller hennes arbete. Denna princip är sann för alla problemlösare, här är det ingen skillnad på lärare och elever.

Artikelförfattarna menade "att det inte finns något bättre sätt att komma på och utveckla idéer än att vara med i en gemenskap där tänkande kring och arbete med problem diskuteras öppet. Vi kan lära oss nya tekniker, färdigheter, ansatser och sätt att tänka om och se på problem. Genom diskussioner med andra blir problemlösningen lättare, effektivare och djupare än när vi arbetar ensamma."

40 artiklar och 144 problem

Under de tio år som artikelserien pågick presenterades sammanlagt 144 problem. Inget av dem kräver kunskaper i matematik utöver logiskt resonande och grundläggande kunskaper om tal, geometri och algebra. I praktiken gjorde det att problemen spred sig även utanför matematiklärarkretsar.

Problemen kompletterades i varje nummer med en text om problemlösningens konst i allmänhet eller om arbetet med lösning av ett specifikt problem.

När DPL-serien avslutades flyttades allt över till NCM:s webbplats ncm.gu.se. Under Klassrum och Problemlösning finns alla artiklar och problem samlade. För att locka till (förnyad) läsning av DPL återpublicerar vi en text om problemlösningsslycka från nummer 4, 1999 i detta temanummer om problemlösning, författare är Lars Mouwitz.

Återkoppling

I den första DPL-artikeln uppmuntrades läsarna att höra av sig och berätta om lösningen av ett problem. Viktigast var inte att redovisa ett svar utan följande punkter poängterades:

- ♦ Kommentarer om problem som gjort dig förvirrad / tveksam om hur du ska göra.
- ♦ Diskussioner av vad du har gjort eller hur du har reagerat när du "kört fast" i dina försök att lösa ett problem.
- ♦ Förslag till lösningar på problem tillsammans med kommentarer om hur du kommit på lösningen och varför det är en intressant eller elegant lösning.
- ♦ Idéer om intressanta utvidgningar eller generaliseringar på problem.
- ♦ Förslag till hur problem kan användas i matematikundervisningen.

Dagens redaktion skulle troligen skrivit om punkterna en aning och betonat aspekter av samverkan och samarbete lite mer.

Redan till den första artikeln hade en läsare ombetts att lösa det första DLP-problemet och berätta om sin problemlösningsprocess – utan att för den skull avslöja svaret. Det finns alltså inte svar till de 144 problemen. Istället skrivs det fram i flera av de följande artiklarna vad som gör problemlösning så mycket mer intressant och tillfredsställande när det inte finns facit att tillgå.

Det första problemet hade rubriken *Tomten vandrar sin lysta ban ...*

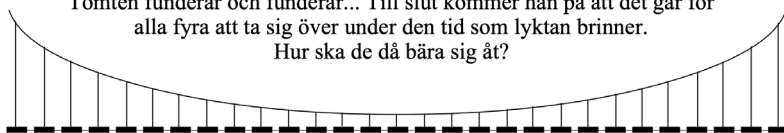
1 Tomten vandrar sin lysta ban ...

Jultomten och tre tomtenissar, Frank, Bengt och Göran, ska i midvinternatten passera en isig hängbro över en djup ravin. Alla befinner sig på ena sidan ravinen. Bara två personer åt gången kan befinna sig på bron. Tomten och nissarna går olika fort och när de går två och två tar det den tid som den långsammaste behöver. Tomten går på 10, Frank på 5, Bengt på 1 och Göran på 2 minuter.

Ingen av dem kan gå över utan att ha något att lysa sig med, eftersom bronns vägbana är skrovlig och halkig. De har en enda lykta och den måste en gående ha med fram och tillbaka. Det går inte att kasta lyktan mellan sig och dess brinntid är 17 minuter.

Tomten funderar och funderar... Till slut kommer han på att det går för alla fyra att ta sig över under den tid som lyktan brinner.

Hur ska de då bära sig åt?



”Efter att ha lekt runt lite med olika kombinationer av nissar och tider utan att ha kommit i närheten av 17 minuter började jag undra om problemet överhuvudtaget var lösbart utan användning av speciella ”knepe”. Jag tänkte på att lampan kastades mellan nissar, eller något sätt att bilda en langningskedja. Problemformuleringen ger dock inga utrymmen för ”knepe” och jag fann inget annat ”kryphål”. Problemet kanske var olösbart? Den korrekta lösningen var just att problemet saknade lösning, så är det ju ofta i verkligheten! Jag bestämde att så var fallet och beslöt att försöka visa att det inte finns någon lösning för tider mindre än 19 minuter eller var det 18? Jag snickrade ihop ett som jag tyckte rimligt logiskt resonemang som tycktes hållbart och lade problemet åt sidan.

Ett par dagar senare började jag tvivla på min lösning. Kanske gick det att lösa ändå ... Vid en fikapaus påstod en kollega att hon löst problemet. Hon var mycket angelägen om att berätta hur hon gjort och trots mina protester fortsatte hon redogöra för sin lösning. Jag var tvungen att gå ut ur rummet för att undvika höra ”det rätta svaret” och på så sätt gå miste om att ha kvar det roliga själv!

Mina misstankar om löslbarheten var bekräftade och jag fann snart en lucka i mitt tidigare resonemang. Detta misstag gav också en idé om hur jag kunde gå vidare. Idén visade sig hållbar och så småningom fann jag en lösning. Denna gav i sin tur upphov till ytterligare en genom en enkel ändring. Nu så här i efterhand verkar det otroligt att det tog nästan en hel vecka! Nu när allt är ”klart” börjar jag undra om det finns fler än två lösningar till problemet, eller om man kanske kan göra det under 17 minuter.”

Problemet blir en låda

När DPL-serien inleddes arbetade jag på en högstadieskola. På Elevens val hade några elever arbetat med det kända problemet med en bonde som ska ro över en å och ta med sig ett kålhuvud, ett får och en varg under vissa givna villkor. Först satt eleverna och ritade pilar under tiden de diskuterade problemet. Efter en stund plockade de fram en trögubbe, en grön vaddkula (kålhuvud), ett litet leksaksfår och en leksakshund (varg) i plast samt en kartongbit som med några klipp fick representera båten. Efter en stund då de ”rodde båten” över ån med olika last föll sig lösningen rätt självklar. När eleverna hade löst problemet frågade de om de fick göra en låda med problemet och de konkreta figurerna. Det fick de och kanske finns lådan kvar än idag på skolan.

När jag hade läst igenom *Tomten vandrar sin lysta ban* ... och funderat på ungefär samma sätt som läsaren i berättelsen ovan tänkte jag att ”en låda” skulle vara bra att ha. Sagt och gjort, jag plockade fram material och satte igång att bygga en bro i en låda. Med fingrarna sysselsatta med att tillverka tomtenissar och med problemet från Elevens val i bakhuvudet så uppenbarade sig lösningen. Den lådan finns ännu kvar i NCM:s matematikverkstad, ganska skamfilad men fullt duglig som ett konkret stöd i problemlösningen.

Tre principer och fyra tankevanor

Efter tio års uthålligt arbete med DPL var det så dags att avrunda artikelserien. Diana Lambdin och Frank Lester som var med vid uppstarten blev inbjudna att också medverka vid avslutningen. Under de gångna åren hade de fortsatt sin forskning om hur elevers problemlösningsförmåga kan utvecklas genom tre fundamentala principer för problemlösning:

1. elever och lärare måste ha möjlighet att återkommande ägna sig åt riktig problemlösning, det går inte att förbättra förmågan att lösa problem om man inte arbetar med problemlösning ofta och under en längre tidsperiod
2. det är inte nog att enbart försöka lösa ett antal problem, man måste också reflektera över tänkande och lösningsförsök – både egna och andras – samt bemöda sig om att lära sig så mycket man kan kring egna styrkor och svagheter som problemlösare
3. det finns inget bättre sätt att utveckla sin problemlösningsförmåga än i gemenskap med andra som arbetar med problem och där tänkande kring dessa diskuteras öppet.

Nu sammanfattade de dessa principer, *mathematical habits of mind*, som stöd för lärarens roll att hjälpa elever utveckla sunda tankevanor kring problemlösning, tankevanor som ska stärka sambandet mellan vardagligt sunt förnuft och matematik:

Tankevana 1

Leta efter mönster, eftersom matematik kan uppfattas som läran om mönster och strukturer.

Tankevana 2

Var flexibel, anpassa användning av heuristik, (det vill säga olika tillvägagångssätt för att kunna upptäcka eller uppfinna metoder att lösa problem, där lösningsmetoden inte är given från början) och strategier till problemsituationen.

Tankevana 3

Rita en figur eller ett diagram som har fokus på relevant information i problemets formulering.

Tankevana 4

Analysa dina antaganden, metoder och lösningar. Sträva efter klarhet och effektivitet.

Som avslutning bjöd de på några problem att använda för att utveckla goda tankevanor och det allra sista DPL-problemet löd:

Bestäm summan av de inre vinklarna i en stjärna på minst 5 olika sätt. Vi har sett 6 sätt, men vi tror att det finns fler. Vinklarna är inte nödvändigtvis lika stora.

