

# Begreppsförståelse genom problemlösning

Problemlösning är en fundamental del av matematisk verksamhet, men hur ska problem utformas om syftet är att utveckla elevens begreppsförståelse? Här har flera olika problem testats och reviderats för att skapa begreppsliga utmaningar.

F från tidigare studier vet vi att arbete med matematiska problem är värdefullt för elevers lärande i matematik. Med ett matematiskt problem avses en uppgift för vilken en elev inte har enkel tillgång till en färdig lösningsmetod. Förutom kreativa utmaningar med att konstruera delvis nya lösningsmetoder kan matematiska problem medföra begreppsliga utmaningar, vilka kan bidra till reflektion och uthållighet, som i sin tur visat sig betydelsefullt för att lära sig matematik. Samtidigt visar flera studier att matematikundervisningen till stor del utgår från läromedel där majoriteten av uppgifterna är av rutinmässig karaktär. Elever behöver dock möta matematiska begrepp på olika sätt, och utformning och urval av matematiska problem är ett sätt att rikta uppmärksamhet mot specifika egenskaper, representationer eller andra aspekter av begrepp. Även om det finns en hel del forskning om fördelar med att arbeta med matematiska problem generellt, är det begränsat med kunskap om vad hos de matematiska problemen som bidrar till utveckling av matematisk begreppsförståelse.

## Fem aspekter av matematiska begrepp

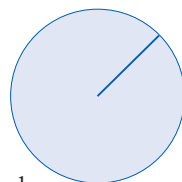
Som utgångspunkt i det projekt vi beskriver längre fram i artikeln användes en teoretisk inramning av matematiska begrepp, där fem olika aspekter har identifierats. Dessa anses vara viktiga för att utveckla både en bred och djup förståelse för matematiska begrepp.

### 1. Egenskaper och definitioner

Till varje begrepp hör en definition. Så här kan till exempel begreppen cirkel, radie och diameter definieras:

En *cirkel* är mängden av punkter i planet som ligger på samma avstånd, cirkelns *radie*, från en given punkt, cirkelns mittpunkt.

*Diametern* är den dubbla längden av *radien* och kan mätas från en sida av cirkeln till den andra genom att passera mittpunkten.



Genom definitioner synliggörs ofta flera av ett begrepps centrala egenskaper. Det är viktigt att kunna beskriva och förstå ett begrepps egenskaper

och definitioner. Även om elever till exempel kan beskriva egenskaper hos begreppet cirkel så som att dess diameter är avståndet från sida till sida genom mittpunkten, så kan de ha svårt att lösa problem som innebär att de måste förstå att en diameter kan vara såväl vertikal som horisontell. Detta relaterar även till nästa aspekt.

## 2. Typiska och atypiska situationer

Vid till exempel uppmaningar som *Rita diametern i en cirkel!* eller *Tänk på ett tal!* gör personer det som är mest naturligt för dem. En elev som mestadels ser exempel där diametern visualiseras med hjälp av en horisontell sträcka kan få svårt att lösa problem där de måste förstå diametern som en lodrät sträcka. En elev som ombeds säga ett tal uppger antagligen ett naturligt tal mellan 1 och 20, och inte ett negativt, rationellt tal eller komplext tal.

## 3. Representationer

Representationer används för att beskriva matematiska begrepp. Här är några exempel på olika typer av representationer av cirklar, tal och räkning:

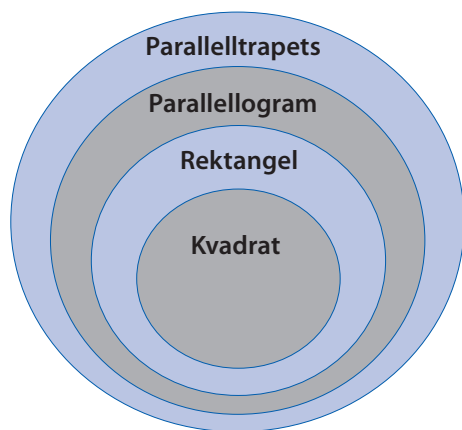
- Konkret:** ett cykelhjul (för cirkel), tre nallar (för antal nallar)
- Bildlig:** ritar en ring (för cirkel) eller ritar tre nallar (för antal nallar)
- Ord:** tre (för tal, antal), tredje (för ordning), addition, summa
- Ikonisk:** ritar tre streck (för antal nallar), använder större och mindre knappar (för hel och halv)
- Symbolisk:** 3 (för tal, antal, ordning), + (för addition),  $\Delta$  (för avstånd eller skillnad), en tallinje (för tal, sträcka, operation)



Olika representationer synliggör ett begrepp på olika sätt. Att arbeta med att tolka olika representationer och att skifta mellan och använda olika representationer anses därför bidra till att utveckla förståelsen för ett begrepp.

## 4. Hierarkiska och icke-hierarkiska samband

Matematiska begrepp relaterar till varandra på olika sätt. Att en kvadrat är en slags rektangel som i sin tur är en parallelogram är ett exempel på en *hierarkisk* relation (se bilden).



Relationen mellan addition och subtraktion är däremot en *icke-hierarkisk* relation. Subtraktionen  $8 + 5$  motsvarar att addera inversen  $8 + (-5)$ . Båda räknesätten fungerar under den distributiva lagen:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  och  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ . Men däremot gäller den kommutativa och associativa lagen bara för addition och inte för subtraktion:  $7 + 5 = 5 + 7$ ,  $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$ . Elever behöver utveckla både hierarkiska och icke-hierarkiska relationer mellan olika delar av begreppsuppfattningen.

## 5. Procedurer som blir begrepp

Många matematiska begrepp börjar som procedurer. Först kopplas en symbol till en procedur som genomförs. I nästa steg ses symbolen som både en del av en procedur och ett begrepp med ett innehåll.

| <i>Symbol</i> | <i>Procedur</i> | <i>Begrepp</i>                 |
|---------------|-----------------|--------------------------------|
| 1, 2, 3, 4, 5 | uppräknings     | tal                            |
| $3 + 2$       | addera          | addition, summa                |
| $4 - 3$       | subtrahera      | subtraktion, differens         |
| $3 / 4$       | dividera        | division, kvot, rationellt tal |

Enbart procedurer räcker inte för att förstå och använda matematiken i olika situationer. En utvecklad begreppsförståelse inkluderar att förstå hur olika procedurer relaterar till olika matematiska begrepp.

### Ett skolprojekt

Genom ett samarbete med gymnasielärare i Härnösands kommun har vi arbetat med att utforma matematiska problem som låter elever möta olika aspekter av matematiska begrepp och på så sätt också erbjuda dem möjlighet att utveckla sin begreppsförståelse.

För att komma fram till vad som är viktigt då man vill utforma matematiska problem som låter elever möta olika aspekter av matematiska begrepp testade vi problem i tre omgångar. Varje omgång startade med val och utformningen av olika problem tillsammans med lärare.

Ursprungen till problemen kom ifrån läromedel, nationella prov (NP) och andra tillgängliga uppgiftsbanks. För varje problem bestämdes ett specifikt matematiskt lärandemål och vilken/vilka av de fem aspekterna som skulle fokuseras. Vid behov modifierades ursprungsproblemen för att uppfylla målet.

I nästa steg lät vi elever arbeta enskilt med de olika problemen. Elevernas arbete filmades och de uppmanades att "tänka högt". Vid behov ställdes kompletterande frågor. Dessutom samlades elevernas skriftliga lösningar in. I analysen av elevernas arbete avgjordes först om det tänkta problemet verkligen utgjorde ett matematiskt problem för eleverna. Om det ansågs vara ett matematiskt problem identifierades vilken typ av utmaning eleven ställdes inför och hur detta relaterade till den tänkta aspekten av begreppsförståelse, samt om någon av de andra aspekterna av begreppsförståelse också synliggjordes i utmaningen. Analysen av elevernas arbete ledde till modifieringar av de matematiska problemen i efterföljande omgång. Totalt deltog 21 elever och analysen innefattade närmare 200 elevlösningar till 11 matematiska problem.

I nästa stycke beskrivs några exempel på matematiska problem som visade sig skapa förutsättningar för eleverna att ta hänsyn till begreppsliga aspekter, och därmed ges en möjlighet att utveckla sin begreppsförståelse.

## Definitioner och procedurer

I första omgången fick eleverna följande problemformulering hämtat från NP för årskurs 9 år 2015:

Medelvärde av fem tal är 7. Medianen är 9. Ge ett förslag på vilka de fem talen kan vara.

Vid elevernas arbete med denna uppgift kom det fram att de främst fastnade på "vad som var vad" av median och medelvärde. Denna osäkerhet hindrade flera elever från att börja fundera kring tänkbara sätt att lösa problemet. Först när de fick bekräftat att de kom ihåg medelvärde och median korrekt startade problemlösningsprocessen och de kom i de flesta fall fram till förslag på tänkbara tal. Eftersom det inte var själva formuleringen av definitionen eller rutinen som var i fokus, utan hur detta kan användas i nya sammanhang beslutades att i nästa omgång inkludera definitionerna i problemformuleringen till eleverna. Problemformulering i omgång 2 fick därför tillägget:

*Förklaring av olika ord*

Medelvärde: summan av talen dividerat med deras antal

Median: det mittersta av ett udda antal tal ordnade i storleksordning, eller medelvärde av de två mittersta talen av ett jämnt antal tal ordnade i storleksordning.

Detta visade sig hjälpa vissa elever att påbörja problemlösningsprocess, men det var nu istället elever som fastnade på formuleringarna och hade svårt att tolka innebörden av dem. Därför beslutades att i den tredje omgången lägga till ett symboliskt exempel istället för en skriftlig förklaring. Problemformulering i omgång 3 fick istället tillägget:

*Exempel:*

Medelvärde av talen 11, 7, 25, 14, 43 är  $\frac{11 + 7 + 25 + 14 + 43}{5} = 20$

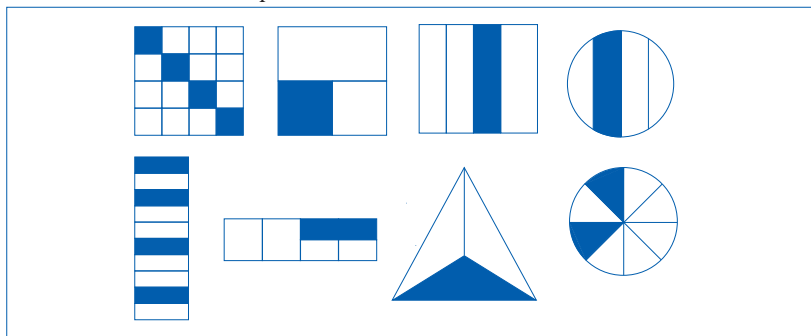
Medianen av talen ovan är: 7, 11, 14, 25, 43

Detta visade sig vara en bättre utformning av problemet som hjälpte eleverna att använda definitionerna och beräkningsprocedurerna i nya sammanhang, vilket i sin tur antas utveckla deras begreppsförståelse.

## Egenskaper och atypiska situationer

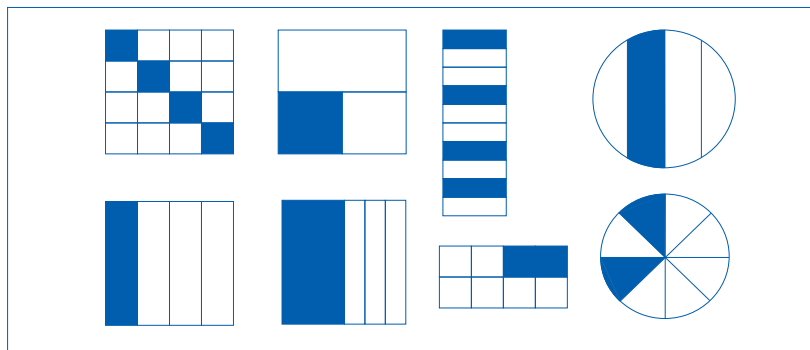
I första omgången fick eleverna följande problemformulering:

Vilka figurer visar  $\frac{1}{4}$ ? Ringa in dessa.



De flesta elever sa sig ha stött på den här typen av uppgift förr. Samtidigt märktes att vissa av figurerna var obekanta för dem. Ett vanligt angreppssätt var att räkna de färgade delarna och jämföra med helheten, i en del fall utan att ta hänsyn till arean. För vissa av figurerna fungerar detta, men inte för alla. Det märktes också att vissa elever slutade ringa in figurer efter att ha bestämt några de kände sig säkra på.

För att utmana eleverna att ta hänsyn till area ändrades ordning på vissa figurer så att liknande figurer med olika area var intill varandra, och triangeln togs bort. Bilden som användes i omgång 2 var då istället:



Från elevernas lösningar kunde vi se att problemet fortfarande hade potential att utveckla elevers begreppsförståelse, men att en del elever ringade in för få och en del för många. För att verkligen få elever att reflektera kring egenskapen "lika delar" bestämdes att i omgång tre lägga till information om hur många figurer som eleverna förväntades ringa in. Problemformulering i omgång 3 blev därför:

Vilka fem figurer visar  $\frac{1}{4}$ ? Ringa in dessa.

Det var fortfarande samma åtta figurer som i omgång 2, men den explicita information att de skulle ringa in fem av dem fick eleverna att reflektera kring egenskapen i relation till de figurer som var atypiska för situationen. På detta sätt fick de också möjlighet att utveckla sin begreppsförståelse.

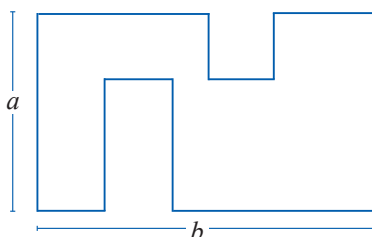
### Definitioner och atypiska situationer

I första omgången fick eleverna följande problemformulering från NP för gymnasieskolans MaA år 2010:

Vilket av följande uttryck motsvarar figurens omkrets?

$$a + b \quad 2a + 2b \quad 3a + 2b \quad 4a + 2b$$

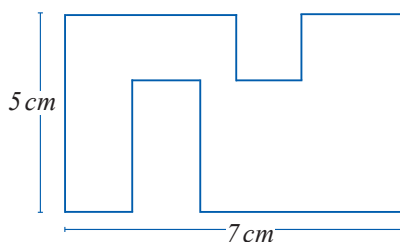
Motivera ditt svar.



Alla elever visade en viss förståelse för att omkrets handlade om "alla sidor tillsammans", men de hade svårt att avgöra vilka sidor som skulle ingå i detta "alla". Ingen av eleverna var vana vid att bestämma omkrets för den här typen av figur. Att dessutom relatera omkretsen till ett algebraiskt uttryck verkade vara en för stor utmaning för de flesta eleverna. Eftersom fokus var på begreppet omkrets och inte specifikt på algebraiska uttryck ersattes bokstäverna med siffror i nästa omgång. Samtidigt lades alternativet 35 till, vilket motsvarar arean av en rektangel med de givna måtten. Problemformulering i omgång 2 blev:

Vilket av följande tal motsvarar figurens omkrets? Motivera ditt svar.  
(OBS! Figuren är inte skalenlig)

- a) 12      b) 24      c) 29      d) 34      e) 35      f) 36



Denna utformning visade sig vara tillräcklig för att den aktuella elevgruppen skulle kunna angripa problemet. Som beskrivs ovan så var i princip alla elever medvetna om att omkrets innebar "alla sidor tillsammans", samtidigt svarade de flesta elever 24. Det vill säga, de tog inte hänsyn till de vertikala sidorna i inbuktningarna. För att få eleverna att reflektera över innebörden av definitionen valdes att i omgång 3 ta bort alternativ som kunde leda in dem på fel spår. För att ändå ha några olika alternativ att välja på lades två värden till. Samma figur användes men problemformuleringen i omgång 3 var:

Vilket av följande tal motsvarar figurens omkrets? Motivera ditt svar.  
(OBS! Figuren är inte skalenlig)

- a) 12      b) 22      c) 34      d) 46

Detta visade sig vara en fördelaktig utformning för att få eleverna att reflektera kring innebörden av omkrets i relation till representationer som var atypiska.

## Sammanfattning

Våra analyser visade att aspekten *egenskaper* och *definitioner* spelade en viktig roll i alla matematiska problem som ingick i studien, och att denna aspekt samverkade med en eller flera av de andra aspekterna. Vidare såg vi att matematiska problem som föreföll gynnsamma för utveckling av begrepps-förståelse innehöll olika typer av uppmaningar som tvingade eleverna att reflektera över sin lösningsprocess, till exempel explicita instruktioner om hur många figurer som ska ringas in. Det blev också uppenbart att det var viktigt att problemen inte innehöll olika typer av distraktorer som avleder uppmärksamheten från den avsedda aspekten av det matematiska begreppet. Det innebär att man till exempel utesluter information som kan leda eleverna fel, som exempelvis mått på felaktig omkrets, eller mått på area.

I andra fall kan det innebära att tillhandahålla matematisk information för att undvika oavsiktliga utmaningar, som till exempel vad som är medelvärde och vad som är median när det inte är själva formuleringen av definitionen som är lärandemålet. Detta pekar också på vikten av att särskilja uppgifter för lärande från uppgifter för bedömning, där distraktorer har en värdefull funktion genom att fånga elevers eventuella missuppfattningar.

Vidare kan den teoretiska inramningen anses som en värdefull utgångspunkt för att planera och genomföra undervisning med fokus på begrepps-förståelse. Utifrån resultatet från de olika problem som prövats i denna studie föreslås två principer för en praktisk användning av den teoretiska inramningen som stöd vid val och design av matematiska problem med fokus på utveckling av begrepps-förståelse. För det första verkar det rimligt att uttryckligen fokusera på en specifik egenskap hos ett begrepp. För det andra verkar matematiska problem där eleverna måste använda såväl typiska som atypiska representationer vara värdefulla för att synliggöra specifika begreppsliga egenskaper.

#### LITTERATUR

- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32.
- Jäder, J. (2022). Creative and conceptual challenges in mathematical problem solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27(3), 49–68.
- Wedman, L. (2020). *The concept concept in mathematics education: A concept analysis* [doktorsavhandling]. Acta Universitatis Gothoburgensis.