

Så kan eleven bedöma resultatens rimlighet

Enligt kursplanerna från lågstadium till gymnasium ska eleverna kunna bedöma rimlighet i resultat de får fram. Ett sätt för eleverna att bedöma resultatens rimlighet är att ta inspiration från det som i vetenskap kallas metodtriangulering. Denna artikel visar hur metodtriangulering kan se ut för problemlösning i skolan.

Ett sätt för eleverna att bedöma resultatens rimlighet är att ta inspiration från det som i vetenskap kallas metodtriangulering, vilket betyder att man använder två olika metoder. Om de olika metoderna ger samma slutsats vågar man lita på resultatet. Ger de olika resultat ger man sig själv chansen att korrigera sin lösning, vilket kan minska både stress och oro under ett prov och förtret efteråt.

Metodtriangulering för ekvationer

Ett exempel på metodtriangulering för ekvationslösning är att först lösa problemet algebraiskt och sedan pröva lösningen. Vi tittar på uppgift 30 på delprov D i 2017 års nationella prov för år 9.

Eleverna tar med sig pengar till en fest för att köpa lotter, läsk och snacks. Amira har dubbelt så mycket pengar med sig som Kevin. Simon har 50 kr mindre än Amira. Johan har 3 gånger så mycket pengar som Simon. Tillsammans har de 735 kr. Hur mycket pengar har Johan?

En lösning är att arbeta som i tabellen nedan: Formulera ekvationen på andra raden, sedan lösa den och få fram att Kevin har 85 kr och slutligen i tredje raden pröva att summan verkligen blir 735 kr. I tabellen står namnen för respektive persons summa.

	Kevin	+ Amira	+ Simon	+ Johan	Summa
Ekvation	Kevin	+ 2 Kevin	+ 2 · Kevin – 50	+ 3 · (2 · Kevin – 50)	= 735 kr
Prövning	85 kr	+ 170 kr	+ 120 kr	+ 360 kr	= 735 kr

Om man, när man provar lösningen, finner att den löser ekvationen, så är det ofta ett gott argument för att man har räknat rätt och svaret är rimligt. Om den funna lösningen inte löser ekvationen har man räknat eller modellerat ekvationen fel någonstans eller hittat en falsk lösning. Då är det bara att undersöka om felet ligger i modellen, i den algebraiska lösningen eller i prövningen. Oavsett vilket, erbjuder metodtriangulering en möjlighet att kontrollera sitt resultat.

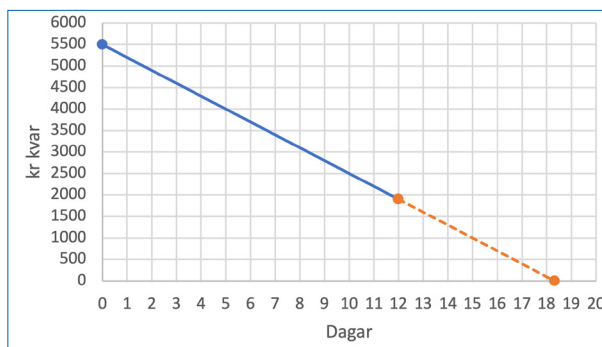
Att både lösa och pröva ekvationer tar tid, men kan hjälpa till med att upptäcka och åtgärda räknefel. För att uppmuntra eleverna att göra det extra arbetet att både lösa ekvationer och pröva rötter, kan man formulera provuppgifter i två steg: (a) lös och (b) pröva. Rimligen sparar detta tid även för lärare, då de behöver konstruera färre provuppgifter och troligen får in färre felaktiga (och ofta konstiga) lösningar som tar tid att ge formativ återkoppling på. Kanske även elevernas attityd förbättras då de får möjlighet att upptäcka och åtgärda fel som annars hade orsakat förtret.

Metodtriangulering för linjära problem

Men hur gör man när det inte finns någon tydlig ekvation att formulera eller lösa och pröva? Ett sådant exempel får vi i uppgift 22 på delprov D i 2013 års nationella prov för år 9.

Kevin hade 5500 kr med sig i reskassa. Efter 12 dygn har han 1900 kr kvar. Kevin räknar med att använda sina pengar i samma takt som hittills. Hur många dagar räcker då det som Kevin har kvar av reskassan?

Det går förstås att lösa detta numeriskt genom att konstatera att Kevin har gjort av med 3600 kr på 12 dygn, alltså 300 kr per dygn. I denna takt räcker återstående pengar $1900/300$ vilket är drygt 6 dagar. En grafisk och därmed approximativ lösning är att i ett koordinatsystem på rutpapper pricka in koordinaterna (0 dagar ; 5500 kr kvar) och (12 dagar ; 1900 kr kvar) som i figur 1. Nästa steg är att förlänga linjen till 0 kr kvar (= x -axeln) och konstatera att det sker ungefär vid x -värdet 18 dagar. Eftersom metodtrianguleringen med de numeriska och grafiska beräkningarna ger ungefär samma resultat har vi ganska säkert räknat rätt och kan betrakta resultatet som rimligt.

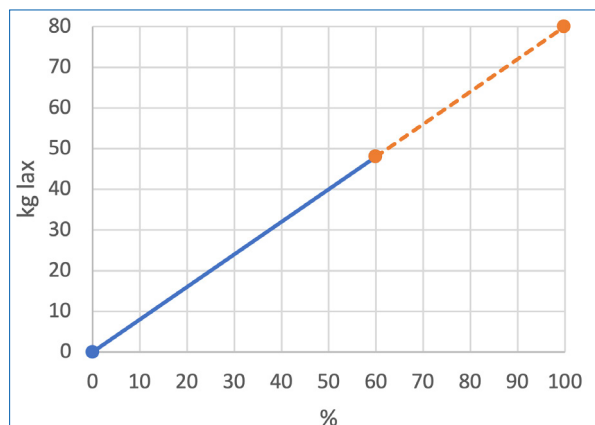


Figur 1. Extrapolera linjen för att grafiskt hitta en rot.

Att extrapolera genom att dra linjen ända ut till den sökta lösningen för uppgiften med reskassan fungerar även för en del procentuppgifter som flera elever tycker är knepiga. Ett exempel är hämtat från uppgift 28 på delprov D i 2017 års nationella prov för år 9.

Amira ska laga mat till en fest. Hon ska laga 240 portioner lax. Hon vet att cirka 40% av laxens vikt kastas bort när den rensas. En portion rensad lax ska väga cirka 200 g. Hur många kilogram lax behöver hon köpa?

Problemet kan lösas exempelvis med ekvationen $0,6 \cdot (x \text{ kg}) = (0,2 \text{ kg}) \cdot 240$, men att dividera med tal mellan 0 och 1 tycker flera elever är obekvämt och det är vanligt med decimalfel som kan ge både 8 kg och 800 kg lax. Ett annat vanligt fel är att eleven multiplicerar istället för dividera ekvationens högerled med 0,6. Då kan det vara ett stöd att jämföra sin lösning med ett värde i en graf. Här blir arbetsgången att konstatera att 240 portioner väger 48 kg enligt ekvationens högerled och pricka in koordinaten (60%; 48 kg) i figur 2 och även koordinaten (0%; 0 kg). Nästa steg är att extrapolera ut till 100% och avläsa att det ser ut att motsvara 80 kg lax.



Figur 2. Extrapolera linjen för att grafiskt hitta sökt värde.

En grafisk lösning för just procent är smidigt eftersom axeln med procentvärden ofta är från 0 till 100. Så är dock inte alltid fallet. I uppgift 29a på delprov D i 2013 års nationella prov för år 9 motsvarar den givna informationen koordinaterna (0%; 0) och (160%; 4000). Då får man istället interpolera till koordinaten (100%; x). Att interpolera betyder att lösningen finns mellan två kända värden på linjen.

En enklare variant av procenträkning är när man, som i provuppgift 20 från samma delprov, redan känner till koordinaten (100%; 50 miljoner) och ska interpolera denna proportionalitet till koordinaten (7,5%; x miljoner). En grafisk lösning visar att det bör bli cirka 4 miljoner, vilket visar att det numeriskt beräknade svaret 3,75 miljoner är rimligt.

Metodtriangulering för ett blandningsproblem

Blandningsproblem är en klassiker i både läroböcker och matematikdidaktisk forskning. Ett sådant problem finner vi i uppgift 25 på delprov D i 2017 års nationella prov för år 9.

Amira blandar bål till en fest och använder följande recept.

12 liter juice

30 liter cider

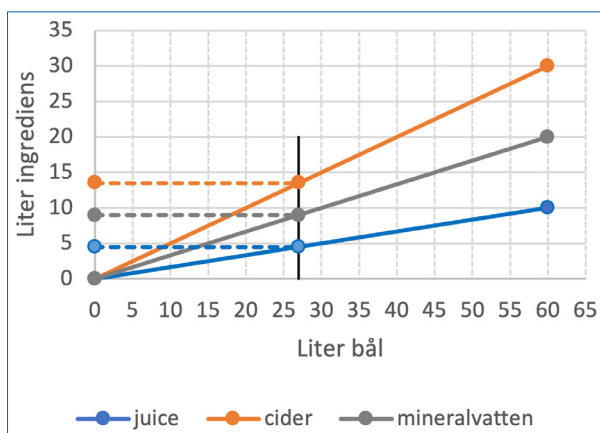
21 liter mineralvatten

Under kvällen behöver Amira fylla på bålen. Hur många liter mineralvatten behöver Amira för att blanda ytterligare 27 liter bål?

En *numerisk* lösning är att beräkna andelen av respektive ingrediens. Exempelvis kan man beräkna *andelen* juice till ungefär 19 % och sedan beräkna *mängden* juice som behövs till 27 liter som $27 \cdot 0,19 \approx 5,1$ liter.

$$\frac{12 \text{ liter}}{12 + 30 + 21 \text{ liter}} \approx 19 \%$$

En *grafisk* lösning är att inse att det handlar om proportionaliteter eftersom 0 liter bål kräver 0 liter juice. Sedan ritar man grafen i ett rutnät med koordinaterna för varje ingrediens. För juicen blir det en linje mellan koordinaterna (0 ; 0) och (63 ; 12) i figur 3 eftersom det ska vara 12 liter juice till 63 liter bål. För att lyfta fram principen om att det går bra att approximera om man är ute efter en rimlighetsbedömning, så är x-koordinaten i figuren avrundad till 60 liter. I övrigt är det bra att rita och avläsa så noggrant man kan och avläsa vid cirka 27 liter att det blir cirka 5 liter juice, cirka 10 liter mineralvatten och cirka 15 liter cider. Eftersom metodtrianguleringen med numeriska och grafiska beräkningarna ger ungefär samma resultat så förefaller resultatet rimligt.



Figur 3. Interpolera linjen för att grafiskt hitta sökt värde.

Bedömning för lärande av metodtriangulering

Det är en rimlig förmodan att elever som undervisas om metodtriangulering utvecklar kompetens motsvarande kursplanens mål att "utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer" då de lär sig att formulera och lösa samma problem på olika sätt. Metodtriangulering innebär även att "reflektera över och värdera valda strategier, modeller och resultat".

Men hur får man elever att göra det merarbete som metodtriangulering innebär? Eftersom examination är ett starkt verktyg för att styra lärande, kan både undervisning och examination utformas så att eleverna belönas att göra det merarbete som det är att använda metodtriangulering för att lösa samma problem.

En slutkommentar är att arbetssättet att lösa ett matematiskt problem på två olika sätt – metodtriangulering – är att arbeta som man ofta gör i matematisk modellering i allt från naturvetenskaper till matematisk modellering i samhällsvetenskaper inklusive ekonomi. Man gör alltså lite extraarbete för att försäkra sig om att två olika modeller eller två olika sätt att beräkna ger ungefär samma resultat.

