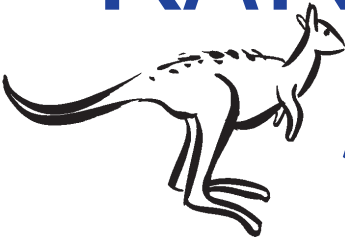


KÄNGURU SIDAN



25 år med Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Sedan starten 1999 har Susanne Gennow och Karin Wallby arbetat med Kängurutävlingen i Sverige. Susanne var Sveriges representant i den internationella organisationen 1998–2018 och deltog i arbetsgruppen Benjamin på de internationella mötena. Karin deltog i gruppen Ecolier under åren 2013–2018. De berättar här om sina erfarenheter och delar med sig av favoritproblem från de 25 åren.

För 25 år sedan hoppade Kängurutävlingen in i vår matematikundervisning. SKM (Svenska kommittén för matematikundervisning) hade ett par år tidigare inrättats för att stödja utvecklingen av matematikundervisningen på alla nivåer i skolsystemet. En av ledamöterna, Mikael Passare, hade i Frankrike hört talas om den internationella tävlingen *Kangaroo sans frontières* (Känguru utan gränser) och trodde att det skulle kunna vara något för svenska skolor att delta i. Sverige inbjöds att skicka en representant till det internationella mötet i Slovenien 1998 och SKM beslöt att skicka Susanne Gennow, som då arbetade på Danderyds gymnasium och var ansvarig för Högstadiets matematiktävling, för att få mer information om tävlingen och ta del av erfarenheter. Susanne kom tillbaka entusiastisk och har fortfarande kvar denna entusiasm för tävlingen.

Det var inte svårt för SKM att besluta att vi skulle testa. Tävlingen fick i Sverige namnet *Kängurutävlingen – Matematikens hopp*. Syftet var dels att uppmärksamma matematikämnet och göra något speciellt kring det, med en speciell dag då alla svenska elever fick lösa bra problem. Dessutom ville vi ge lärare ett stöd för att undervisa med bra problem. Vi förstod att tävling i matematik inte var oproblematiskt, men samtidigt var det intressant att få anordna något där de elever som normalt inte kunde få visa vad de verkligen klarade av kunde få en sådan möjlighet.

Vårterminen 1999 genomfördes en försöksomgång med klassen *Benjamin* på ett antal utvalda klasser i årskurs 5 och 6. Det var klasser där vi kände lärarna och därför kunde räkna med att få ärliga och bra synpunkter tillbaka. Den allra första trepoängsuppgiften var:

$$1999 - 999 + 99 - 9 =$$

A: 1900 B: 1090 C: 1000 D: 1990 E: 1099

Tävlingen slog väl ut, även om det då var 30 problem att lösa på 75 minuter. Vi beslöt därför att utöka tävlingen till större grupper och fler tävlingsklasser, även *Ecolier* och *Cadet*. Eftersom Nämnaren hade de redaktionella resurserna förlades arbetet med att ta fram material, trycka och distribuera dit. Arbetsgruppen bestod av Mikael Passare, Göran Emanuelsson,

Ronnie Ryding samt Susanne och Karin. Det är numera NCM som arrangerar och står bakom Kängurun i Sverige.

Efter några år utökade vi med två tävlingsklasser för gymnasiet, *Junior* och *Student*. Problemen i Junior visade sig vara för svåra för många av de elever som bara läste första kursen i matematik på gymnasiet. Vi gjorde därför under många år en speciell version av Cadet, *CadetGy* utökad med tre extra problem.

Klassen *Milou* tillkom efter önskemål från flera lärare som lämnat sin klass efter årskurs 3, då de hade gjort Ecolier och sen skulle börja om med årskurs 1. De tyckte det var trist att vänta i två år på Kängurutävlingen. Dessutom såg de möjligheten att "skola in" eleverna i formen för Kängurun, det vill säga enskilt arbete utan möjlighet till återkoppling efter varje uppgift, att svara med alternativ och att arbeta på begränsad tid. Vi ville också ge de yngre eleverna något speciellt på Kängurudagen. Allt detta var ju både bra och roligt, så vi gjorde en egen Känguruklass som fick namnet Milou. Efter ett par år fick Susanne berätta om detta arbete på det årliga internationella mötet och där blev man så intresserad att det inrättades en ny klass, Pre-Ecolier, som nu genomförs i många länder.

Förändringar genom åren

Tiden och antalet uppgifter fick vi justera redan de första åren. Det hade från börjat varit 30 problem på 75 minuter för alla tävlingsklasser. Inledningsvis var det många kommentarer om att tävlingstiden var för lång, en lektion på 40 minuter räckte inte till och eleverna "orkade inte arbeta så länge som 75 minuter". Det var också en vanlig kommentar att det var för många uppgifter, eleverna hann inte allt. I olika steg har vi varierat både tid och antalet problem. Denna justering har gjorts även av andra länder, och nu har vi fått allt mer enhetliga tävlingar.

Vi fick under de första åren också en hel del synpunkter på svårighetsnivån. Att inte alla elever kunde förväntas klara alla uppgifter, att det fanns problem som var så svåra att bara några ensstaka kunde klara dem, var ovant. Att låta elever arbeta med problem som de inte visste hur de skulle lösa var inte ett arbetssätt som alla hade provat.

Vi har också fått en del synpunkter, oftare tidigare, att "fel elever" har lyckats bra. Elever som vanligtvis var snabba och klarade uppgifterna hade inte särskilt bra resultat medan "Kalle och Lisa" som aldrig annars lyckades hade mycket bra resultat. Kanske beror det på att problemen är av en annan karaktär, beräkningar spelar inte så stor roll medan problemlösningsförmåga och logiskt tänkande är viktigare.

Vad är ett passande problem?

Till det internationella mötet som hålls varje höst kan alla deltagande länder skicka representanter. Deltagarländerna turas om att arrangera mötet så platsen varierar, i oktober 2015 hölls det i Göteborg. Vid dessa möten diskuteras organisationsfrågor och tävlingsproblemen väljs ut och sätts samman. Det blir omfattande diskussioner både om innehåll och svårighetsnivå på problemen. Det har bland annat lett till att det har skapats riktlinjer för vilka områden som får eller inte får förekomma i de olika klasserna och också riktlinjer för problem på olika nivåer. Trepoängsproblemen bör exempelvis

vara ett-steps-problem. Trots dessa riktlinjer blir det mycket diskuterande när problemen ska väljas ut. Den gedigna processen innebär att alla problem som används är nogra belysta och bedömda utifrån kriterier om lämplighet när det gäller matematiskt innehåll och nivå.

Eftersom vi kommer från olika skolsystem med olika kursplaner blir det stora skillnader mellan vad vi tycker är ett lagom svårt problem för en viss åldersgrupp. Vissa problem som för oss är otänkbara i en viss årskurs kan i andra länder vara självklara och tvärt om. Men dessa diskussioner är också väldigt roliga och ger oss insikter om att det finns kulturellt betingade skillnader mellan hur vi ser på problemen.

Ett favoritproblem

Detta är ett av våra favoritproblem. Det fanns med i alla tävlingsklasser 2008 (Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior och Student). Är det ett svårt problem? Hur tror du att eleverna klarade det?

Det ligger sju kort i en låda. Korten är numrerade från 1 till 7.

Först tar Sofia upp tre kort. Sen tar Ali upp två kort.

Det ligger alltså två kort kvar i lådan.

Sofia säger sedan till Ali:

"Jag vet att summan av talen på dina kort är ett jämnt tal."

Vilken summa har talen på Sofias kort?

A: 15 B: 9 C: 6 D: 10 E: 12

Om du inte redan har använt det med dina elever, så prova. Lösningen ligger inte i att prova alla tänkbara möjligheter utan att ha en god begrepps-förståelse när det gäller udda och jämna tal. Det visade sig när vi analyserade lösningsfrekvenser att det var en mycket svag uppgång från Ecolier till Cadet, men en något större till Junior och Student. I de senare klasserna var deltagarantalet dock mycket lågt och dessutom inte representativt. Det var endast en liten del av eleverna som löste denna uppgift, och vi vet inte om de löste den för att de faktiskt kunde förstå vilka kort Sofia hade eller om de hade lyckats pröva sig fram och fått rätt svar.

Problem från hela världen

På det första internationella mötet som vi deltog i var antalet medlemsländer 25, och alla var i Europa. Tävlingen har under de 25 år som gått sen dess spridits vidare ut i världen. Det är nu cirka 85 medlemsländer i organisationen *Association Kangaroo sans frontières*. 25 länder har ansökt om medlemskap och ska genomföra sina provomgångar. Nu finns medlemmar eller ansökande medlemmar från alla världsdelar. På webbplatsen aksf.org finns en förteckning över alla dessa länder och information om organisationen.

I och med att det har blivit fler medlemsländer har antalet problem att välja bland ökat, då varje land ska lämna in förslag på problem i de klasser som de genomför tävlingen i. De årliga möten där tävlingarna sätts samman är stora möten med 150–200 deltagare, uppdelade på sex arbetsgrupper. De problem som väljs ut är alltså väl granskade och sällade ur ett stort utbud. Underlaget för tävlingen har med åren blivit bättre, nya typer av problem har tillkommit och bilderna är av en helt annan kvalitet numera.

Tema Känguruns hopp

Under de 25 åren har vi samlat på oss ett stort antal problem där vi kan hämta inspiration till intressanta matematiklektioner. Många problem kan sorteras under ett gemensamt tema. Ett sådant skulle kunna vara *Känguruns hopp* och här följer ett urval från olika år, tävlingsklasser och svårighetsgrad.

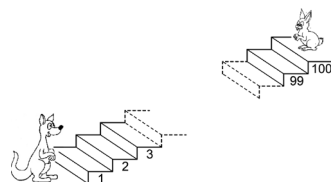
Kängu hoppar tre skutt två gånger.

Hur många skutt hoppar hon totalt?

A: 3 B: 2 C: 5 D: 6 E: 9

(Milou 2023)

Varje gång som kängurun hoppar upp
7 trappsteg skuttar kaninen ner 3 steg.
På vilket trappsteg kommer de att
mötas?

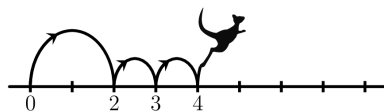


A: 53 B: 60 C: 63 D: 70 E: 73

(Ecolier 2020)

Kängurun hoppar på tallinjen efter
ett bestämt mönster.

Han hoppar alltid först ett långt
och sen två korta hopp, så som
du ser på bilden.



Kängurun startar på 0 och slutar på 16.

Hur många hopp gör han sammanlagt?

A: 4 B: 7 C: 8 D: 9 E: 12

(Ecolier 2022)

En hare, en bäver och en känguru tävlar.

Alla börjar på Start-punkten och hoppar sam-
tidigt medurs runt cirkeln.

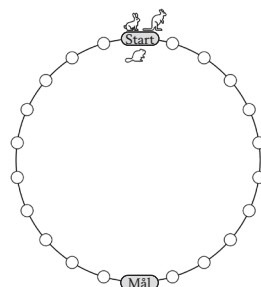
Vinnare är den eller de som efter färst antal
hopp landar på Mål-punkten.

Bävren hoppar ett steg i taget runt cirkeln.

Haren hoppar två steg i taget runt cirkeln.

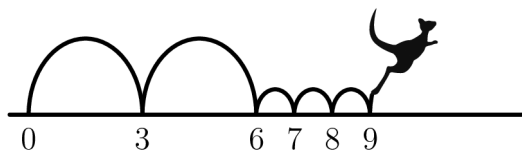
Kängurun hoppar tre steg i taget runt cirkeln.

Vem eller vilka vinner tävlingen?



A: bävern B: haren C: kängurun
D: kängurun och haren E: kängurun och bävern

(Benjamin 2023)



Kengu hoppar på tallinen och gör alltid två stora hopp följt av tre små hopp och upprepar detta hoppmönster. Vilket av talen kommer Kengu att hoppa på om han börjar hoppa från 0?

- A: 82 B: 83 C: 84 D: 85 E: 86 (Cadet 2022)

En känguru hoppar från Bukarest till Paris (2500 km) på sådant sätt att varje nytt hopp är dubbelt så lång som det föregående.

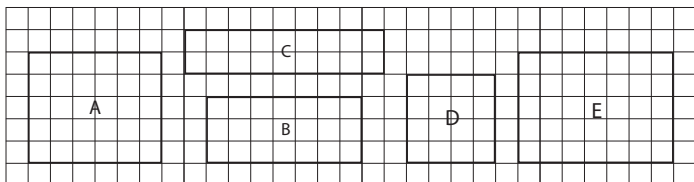
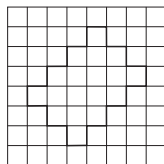
Efter hur många hopp kommer kängurun att vara som närmast Paris, om det första hoppet är 1 m?

- A: 11 B: 12 C: 10 D: 20 E: 21 (Junior 2002)

Bakomliggande matematiska idéer

Det finns alltid en tanke bakom varje problem, en intressant matematisk idé eller en strategi som kan användas på ett effektivt sätt. Begreppen behandlas ofta så att det inte räcker att kunna rätt term och ha en ytlig förståelse. Ett exempel på det är ett annat favoritproblem, från Ecolier 2006, som vi ofta tagit upp i samband med föreläsningar och lärarträffar om Kängurutävlingen och problemlösning:

Av den svarta tråden i rutmönstret till höger ska man forma en rektangel. Vilken kan man få?



En kommentar som ofta kommit i samband med detta problem är att vi borde ha frågat "Vilken rektangel har samma omkrets som trådfiguren?". Vad hade hänt med problemet då? Hade det varit ett lika bra problem?

Ett annat problem som behandlar geometriska begrepp är detta volymproblem från Benjamin 2002:

Ett rum har golvytan 4 m gånger 5 m och takhöjden är 3 m. Man vill öka rummets volym med 60 m^3 . Hur mycket ska då taket höjas?

A: 3 m B: 4 m C: 5 m D: 12 m E: 20 m

Det räcker dock inte att behärska de begrepp som problemen behandlar, eller de strategier som behövs. Man måste också vara noggrann, läsa frågan och sätta sig in i situationen, som i ett exempel som fanns med 2006, både på Ecolier och på Benjamin:

Fyra personer får plats runt ett bord när de sitter på varsin sida. Inför skolfesten ställer eleverna ihop sju sådana bord efter varandra till ett enda långt bord. Hur många personer får plats runt detta långbord?

A: 14 B: 16 C: 21 D: 24 E: 28

Vi förvånades över att det var så få elever som hade svarat rätt. Här var det många elever som hade svarat 28. Kanske såg de de två talen, 4 och 7 och utförde multiplikationen, utan att tänka på den faktiska situationen.

En typ av problem som relativt ofta dyker upp är kalenderproblem, som detta från Cadet 2002:

I en och samma månad inföll tre söndagar på jämna datum. Vilken veckodag var den 20:e i denna månad?

A: måndag B: tisdag C: onsdag D: torsdag E: lördag

Sådana problem kan ge upphov till intressanta iakttagelser om almanackan och hur den är konstruerad. Hur tiden går och hur den räknas är kanske något som vi bara tar för givet men som i sig rymmer intressanta matematiska samband.

Vi ser tillbaka – och blickar framåt

När denna text skrivs är vi i full färd med att ta fram underlaget till Kängurutävlingen 2024. Förra året rapporterades 65 000 deltagare in, flest i Benjamin med drygt 25 000 deltagare. Vi vet att det finns många lärare som har varit med i många år med sina klasser, och varje år tillkommer nya. Mycket i samhället, och i skolan, ser annorlunda ut idag om vi jämför med 1999 men de goda matematikproblemen kan vi fortfarande glädja oss åt.

Vi får ibland anledning att gå tillbaka och leta bland tidigare problem, exempelvis när vi tar fram underlagen för *Arbeta vidare* med problemen. Det är alltid lika roligt; det är roligt att bli påmind om de tidiga årens arbete men det finns också riktigt bra problem i de tidigaste tävlingarna – även om underlagen inte såg lika bra ut då som nu, bilderna var till exempel av mycket sämre kvalitet. Gå gärna tillbaka till de tidigaste problemen och låt eleverna lösa dem. I något fall kan kontexten väcka en del frågor – som vad en CD-skiva är – men den underliggande matematiken är inte omodern. Vi vill särskilt föreslå år 2002 – där kan ni finna många mycket bra problem.

Att digitalisera eller inte digitalisera

Frågan om att digitalisera hela tävlingen dyker upp med jämna mellanrum. För lärarens skull kunde det vara en förenkling och ett sätt att minska arbetsinsatsen. När det gäller resultatredovisning, som vi vet varit ett tidskrävande moment, är systemet nu utvecklat så att lärare kan få ut intressant statistik om sin egen klass. Förhoppningsvis används också den som underlag för vidare arbete med problemen. Än så länge måste någon föra över elevernas svar till resultatredovisningen, men möjligheten att låta eleverna lösa problemen på papper och sen avge sina svar digitalt diskuteras. Det vore förstås ett sätt att ytterligare förenkla lärarens arbete.

När det gäller att presentera problemen digitalt och låta eleverna lösa problemen på datorn har vi hittills valt att hålla fast vid arbete med papper och penna. Hur skulle problemlösningen påverkas om allt skulle vara digitaliserat? Eleverna skulle inte ha något att vinna på att problemen bara fanns på skärmen. Problemen skulle då också behöva utformas på annat sätt. Vissa problem är mycket svårare på skärm än på papper och när vi bedömer svårigheten utgår vi från att eleverna har problemen på papper. Detta gäller i synnerhet grundskolans elever. Men alla elever behöver ha möjlighet att rita och anteckna på papper och att rita i figurer. Prova gärna själv, leta rätt på ett relativt svårt problem och tänk efter hur du själv gör när du löser det.

Hur blev det med våra farhågor om tävlingar i matematik?

Att Kängurun är en tävling har varit en stötesten för en del. Vår hållning har varit att vi litar på att de enskilda lärarna hanterar tävlingsmomentet på ett sätt som passar den enskilda klassen – inom ramarna för vad som är tillåtet förstås. En bra jämförelse är Vasaloppet; det är inte många som åker Vasaloppet för att vinna, de allra flesta har ingen ambition alls att vara bland de bästa. Det som driver tusentals skidåkare att delta är just glädjen i att få delta, att se hur mycket man orkar, att jämföra sitt eget resultat med tidigare år, att diskutera upplägg och förberedelser och kanske se vad som behöver justeras inför nästa lopp. Så hoppas vi att Kängurutävlingen ska fungera: för några elever en chans att få bekräftat att de verkligen är matematikbegåvade, men för alla en möjlighet att få erfarenheter att bygga vidare på.



Karin Wallby & Susanne Gennow