

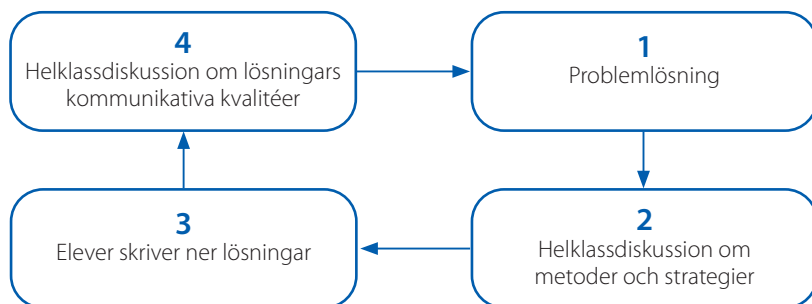
Problemlösning – och sen då?

Problemlösning förekommer ofta i matematikundervisningen. Men hur lär sig eleverna att presentera sin lösning i skrift? I ett pågående forskningsprojekt läggs fokus inte bara på att lösa problem under matematiklektionerna, utan också på att diskutera hur lösningen ska presenteras så att andra kan förstå den.

Problemlösning utgör en kärnkomponent i matematikundervisningen, inte enbart som ett sätt att upptäcka oväntade tillämpningar av etablerade procedurer, utan som en grund för att utveckla kritiskt tänkande, kreativitet och uthållighet bland elever. En framgångsrik problemlösningsprocess innebär utveckling av strategier och begreppsförståelse som eleverna kan överföra till nya sammanhang. Men en utmaning som ofta uppstår är hur man hjälper elever att ordna sina tankar och insikter efter att problemlösningen är avslutad. Hur säkerställer vi att den röriga problemlösningsprocessen leder till välstrukturerade kunskaper? Ett sätt att göra detta på är att förlänga problemlösningsarbetet så att det också omfattar redovisningen av lösningen.

MUSK-modellen

I ett forskningsprojekt har vi arbetat fram ett sådant sätt att arbeta. Vi kan kalla den för MUSK-modellen (där MUSK står för Matematikundervisning för Skriftlig Kommunikation). Modellen går i korthet ut på att 1) elever engageras i problemlösning, 2) några elever och/eller läraren visar olika sätt att lösa problemet så att alla elever förstår åtminstone en lösning, 3) eleverna skriver på egen hand eller i grupper ner en "övertygande lösning till en elev som är frånvarande denna lektion" och 4) läraren engagerar eleverna i att diskutera några utvalda lösningars kommunikationskvalitéer. MUSK-modellens steg 2 till 4 innebär att eleverna på olika sätt bearbetar och reflekterar över problemlösningen. Under diskussionerna i steg 4 kommer eleverna fram till normer för kommunikationskvalitet. Dessa normer får de möjlighet att följa nästa gång klassen jobbar med problemlösning och kommunikation.



Först problemlösning...

I MUSK vill vi skilja mellan att arbeta med att lösa problemet och att skriftligt redovisa hur det kan lösas. Det vi gör i steg 1 och 2 är att ge eleverna möjlighet att först försöka lösa problemet. Eleverna får jobba i grupper, par eller individuellt. Om de kör fast kan de ta stöd av en kompis. Läraren kan ställa fokuserande frågor som "Kan du omformulera frågan i egna ord?" eller "Hur vet du om det stämmer?" men bör undvika att avslöja vilken eller vilka metoder som kan användas. Efter en rimligt lång stund för att en stor del av eleverna ska ha hunnit hitta fram till en lösningsmetod och implementerat den, är det dags att diskutera och jämföra olika lösningar. Dessa har läraren spanat in under problemlösningens gång och identifierat baserat på intressanta begreppsliga aspekter eller olika problemlösningsstrategier som använts. Ett exempelproblem för mellanstadiet, där det lönar sig att jämföra lösningsmetoder, kan vara:

Anna får 20 kr i veckopeng. David får 10 kr. Vad får Bea, om medelvärdet för barnens veckopeng är 40 kr?

$$40 \cdot 3 = 120 - 20 = 100$$
$$100 - 10 = 90$$

$$40 = \frac{20}{3} + \frac{10}{3} + \frac{x}{3}$$
$$\frac{20}{3} = 6.\overline{6}$$
$$\frac{10}{3} = 3.\overline{3}$$
$$6.\overline{6} + 3.\overline{3} = 10$$
$$40 - 10 = 30$$
$$30 \cdot 3 = 90$$

Bilderna visar två lösningar som skulle kunna lyftas fram och förklaras av eleverna som skrivit dem. Vad händer i dessa lösningar? Att de till en början är otydliga är inget problem, för eleverna som presenterar dem pratar samtidigt och kan besvara alla frågor övriga elever kan komma med. Den skriftliga kommunikationen är i det här steget inte viktig. Det man som lärare kan vilja lyfta fram är istället metoderna eller strategierna som använts.

I den första lösningen använde eleven definitionen av medelvärde implicit, och resonerade att $40 \cdot 3$ måste vara summan av de tre talen, alltså 120. Sedan finner eleven skillnaden mellan denna summa och summan av de två kända veckopengsbeloppen.

I den andra lösningen använder eleven medelvärdets formel med en variabel för den okända veckopengen. Även här räknar eleven ut skillnaden mellan det vi vet, och vad det blir utan Beas veckopeng. Och även här multipliceras med 3, men det sker på slutet.

sedan jämförelse...

Vilken lösning gillar eleverna bäst? Varför verkar det vara bra att någon gång multiplicera med 3, och att subtrahera? Hjälpde det att introducera en variabel? Varför hade den andra lösningen fler steg, och var de nödvändiga? Sådana frågor kan vara bra för eleverna att få diskutera i smågrupper och helklass i detta steg.

Det finns forskning om matematikundervisning som har visat att jämförelse mellan problemlösningar har positiv effekt såväl på begreppsförståelse som på förmågan att flexibelt tillämpa procedurer i nya situationer. Det krävs dock lite planering för att få ut så mycket som möjligt av en sådan jämförelse. Bethany Rittle-Johnson och Jon Star lyfter fram vikten av att problemen i sig är lämpliga för att belysa de begrepp eller strategier man vill att eleverna ska lära sig mer om, att problemen ska ha flera olika möjliga lösningar, att eleverna får en chans att förstå en metod innan man ber dem jämföra med en annan lösning. Dessutom kan eleverna behöva stöd i själva jämförelsen. Sådant stöd

kan bestå av att lösningarna är nedskrivna sida vid sida, till exempel på tavlan, instruktioner om att identifiera likheter och olikheter i lösningarna och uppmaningar att utvärdera metodernas effektivitet. Ytterligare stöd kan ges genom att delar av lösningarna namnges och genom att läraren kompletterar elevernas jämförelse med en egen jämförelse där chansen finns att lyfta fram viktiga matematiska principer som eleverna ännu inte upptäckt. Denna jämförelse är inte bara nyttig för de elever som lyckats lösa problemet, utan även för dem som inte har det. Det ger en inkluderande miljö där varje elev kan känna att deras ansträngning är värdefull, och ger en anledning att engagera sig i problemet även om eleven initialt tvivlar på sin förmåga att lösa det. På det viset blir undervisningen differentierad, så att elever med olika styrkor och svagheter kan arbeta tillsammans med samma uppgift.

och slutligen fokus på kommunikationen

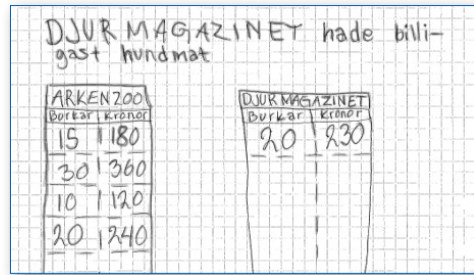
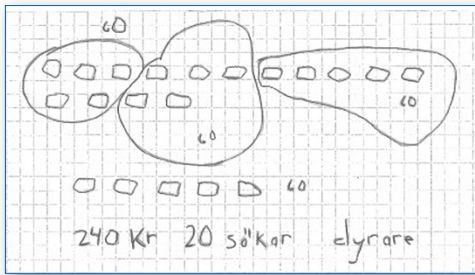
När eleverna arbetat igenom problemet både individuellt och i helklass kommer vi till stegen 3 och 4 i vår modell. Här är kommunikationen det som står i fokus. För att skriftligt formulera och dela sina lösningar, vare sig det sker i grupp eller individuellt, tvingas eleverna att samtidigt förklara problemlösningen för sig själva. Detta kräver att de skapar ett sammanhängande narrativ från den ofta röriga problemlösningsprocessen. Aktiviteten hjälper inte bara eleverna att förstå lösningen bättre utan förbereder dem även för framtida utmaningar.

Eleverna behöver fundera på hur de olika delarna i deras lösning kan kommuniceras så tydligt och effektivt som möjligt. Här skiljer sig våra instruktioner till eleverna från den relativt vanliga uppmaningen "berätta hur du tänkte". Vi har inte, just här, som syfte att ta reda på hur de tänkte eftersom vi dels redan ägnat de första två delarna till det, dels har ett annat mål i sikte. Vi vill att de skriftligt ska redovisa hur problemet kan lösas och de kan därför välja att redovisa hur någon annan elev löst det. Huvudsaken är att de producerar en redovisning där en oinsatt läsare förstår vad som skulle beräknas och hur och varför olika beräkningar gjorts samt vad man kommit fram till.

Att eleverna skriver till en publik gör att detta moment i MUSK kan beskrivas som "learning-by-teaching", en undervisningsmodell där elever förklarar för någon annan som behöver lära sig det eleven redan kan. Learning-by-teaching kräver lite andra kognitiva processer än att förklara för en lärare eller för sig själv. De flesta lärare känner säkert igen sig i att man måste identifiera det väsentliga och strukturera innehållet avsevärt noggrannare när man planerar att undervisa än när man lär sig för sin egen skull. Learning-by-teaching har visat sig lovande för att stärka begreppsförståelse och framför allt flexibelt användande av metoder i många olika sammanhang.

I det sista steget i vår modell jämförs flera olika elevproducerade skriftliga lösningar. Detta steg sker oftast efter några dagar, då läraren behöver få tid att välja ut sådana skriftliga lösningar som har kommunikationskvaliteter värda att diskutera med eleverna. Att det tar tid här är bra eftersom eleverna hinner glömma uppgifterna och metoderna lite grann. Att då färskas upp minnet igen leder, via principen om tidsfördelat lärande, till att minnet av dessa problem, lösningar, begrepp och strategier blir mer beständigt över tid. Vi tittar på ett problem och lösningar från mellanstadiet, som kan vara bra att ha som underlag för diskussion om kommunikationskvaliteter.

Marvin ska köpa hundmat. I den ena affären får man 15 burkar för 180 kr och i den andra 20 burkar för 230 kr. Var får Marvin mest hundmat för pengarna?



Vi ser att båda eleverna väljer att skala upp för att hitta en jämförelsepunkt som inte utgår från pris per burk. Eleverna redovisar dock på olika sätt. Det skulle gå att diskutera med eleverna på vilket sätt lösningen till höger gör det lättare att se vad som gjorts och hur slutsatsen dragits jämfört med lösningen till vänster. En tabell är en representationsform som kan underlätta den egna överblicken och organisationen av beräkningar under problemlösningens gång, samtidigt som den också tydligt kommunicerar resonemanget till någon annan. När det gäller lösningen till vänster kan eleverna diskutera vad som skulle göra det lättare att förstå vilka beräkningar som gjorts. För många elever är beräkningarna intuitiva och efteråt har de inte alltid klart för sig exakt hur de gjort och varför. Diskussioner om hur man tydligt och effektivt kan redovisa vad som gjorts, i vilken ordning och varför kan hjälpa dessa elever att reda i sina tankar och göra intuitiva metoder tydligare för dem själva. När flera klasskamrater säger att de inte förstår vad som gjorts ger de en tydlig återkoppling om var bristerna och förbättringspotentialen finns. Eleven får då stöd i hur hen kan ta hänsyn till läsare i sin redovisning.

För att framgångsrikt integrera problemlösning i matematikundervisningen krävs det mer än att bara presentera problem och hoppas på att eleverna hittar lösningen. Det krävs en medveten ansträngning att inkludera alla elever i jämförelse av lösningar och att uppmuntra till kommunikation och reflektion. Vi har gett förslag på vad man kan diskutera med sina elever men i projektet har vi ofta sett att eleverna själva kommer med många förslag på sådant som är värt att ta upp. Vi menar att det är diskussionerna i sig som ger eleverna möjligheter att skapa välstrukturerade kunskaper. De utvecklar då både förmågan att resonera, kommunicera, lösa problem och hantera begrepp.

LITTERATUR

- Ribosa, J., & Duran, D. (2022). Do students learn what they teach when generating teaching materials for others? A meta-analysis through the lens of learning by teaching. *Educational Research Review*, 100475.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529.
- Teledahl, A., Kilhamn, C., Helenius, O., & Ahl, L. M. (2023). Writing down the solution separate from solving the problem. *For the Learning of Mathematics*, 43(2), 43–49.