

Rika lösningar på rika problem

– *Tornet*

I en serie artiklar tar författarna upp erfarenheter från att ha arbetat med rika matematiska problem. I föregående artiklar har de presenterat problemen *Att dela smörgåsar* (Nämnamnaren 2016:3) och *Att välja glass* (Nämnamnaren 2018:1). Den fjärde artikeln *Felblandad saft* finns i Nämnamnaren 2019:1.

I den tredje delen har vi valt ett mönsterproblem i en elevnära kontext. Vi har samlat in lösningar från elever i årskurs 3 och presenterar hur de använder olika uttrycksformer.

Ett rikt problem för årskurs 3–6

Tornet

- a) Hur många kuber behöver du för att bygga tornet på bilden?
- b) Hur många behöver du för att bygga tornet med höjden 5?
- c) Hur många behöver du för att bygga tornet med höjden 100?

Problemet handlar om mönster och rumsuppfattning. När vi arbetade med problemet blev eleverna engagerade i olika sätt att konkret bygga tornet, men också i att försöka avbilda det och att generalisera till riktigt stora byggen. För att få en variation i klassen fick vissa grupper kuber att bygga med, medan andra grupper uppmanades att rita för att komma fram till en lösning.



Vad gör det här problemet rikt?

Problemet inbjuder till arbete med konkret material, vilket ger elever möjlighet att ta sig an det oavsett förkunskaper i matematik och språk. Det finns också många olika sätt att komma fram till antalet kuber. Aktiviteten har problemlösning som mål och medel i fokus och behandlar:

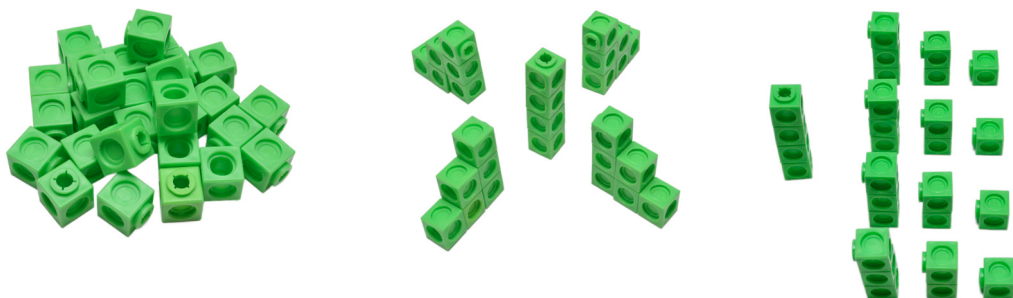
- ♦ talmönster och generaliseringar
- ♦ rumsuppfattning
- ♦ representationer.

Ett problem – fyra uttrycksformer

KLAM-modellen gör det överskådligt att dela in elevers lösningar i olika uttrycksformer. Med hjälp av modellen redogör vi för representativa lösningar som vi har sett.

Konkret (K)

Vid genomförandet använde vissa elever konkret material i form av olidfärgade kuber. Alla som använde konkret material plockade isär tornet till enskilda kuber och räknade sedan kuberna en och en. Detta gjorde det svårt att se mönster och generalisera till större torn. En grupp försökte först ta bort trappor, men kom inte på hur många kuber det var i varje trappa, utan övergick till att räkna kuberna en och en. För torn med höjden 5 gjorde de på samma sätt, men begränsningen upptäcktes när de skulle lista ut antalet kuber för tornet med höjden 100. Vad skulle de göra när kuberna inte räckte till? Detta väckte tankar och några försök till strategier, bland annat att titta på höjder för sig.



Logisk/språklig (L)

En del elever beskrev i ord hur de såg tornet:

2 vingor och 2 ben.
Mitten är 4.

Några elever började också resonera sig fram till svaret muntligt eller skriftligt. De blev uppmuntrade att skriva ner hur de tänkte, speciellt när de gjorde försök att generalisera. I det vänstra exemplet resonerar en elev om tornet i uppgift a) och i högra exemplet om "trapporna" i tornet i uppgift c). Man ser att språket här har blivit ett verktyg för eleven för att beskriva en struktur och komma fram till sin lösning.

Du kan lägga ihop
fyra och tre två en.

Jag har tjugoåtta.

Man går neråt för varje
steg: 99 98 97

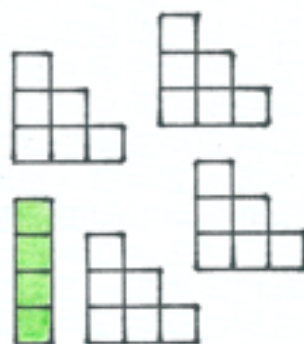
Algebraiskt/aritmetiskt (A)

Elevernas aritmetiska lösningar avslöjar många olika sätt att tänka på tornet. De flesta elever använde additiva strategier och några började generalisera till större torn. Vi lade märke till att det fanns både likheter och skillnader mellan de flesta par av strategier, vilket är en bra utgångspunkt för matematiska diskussioner. Sätten att bokföra sina beräkningar har också olika grad av systematik och tydlighet. Detta kan synliggöras genom att låta en annan elev berätta hur de tror att den som gjort beräkningen har tänkt, eller att diskutera vad som ändras och vad som blir likadant för ett större torn.

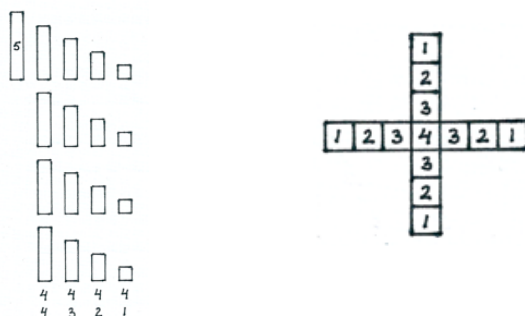
$6 + 4 + 6$ $6 + 6$ $16 + 12 = 28$	Torn med 4 i mitten ger $4 + 6 + 6 + 6 + 6 = 28$ Torn med 5 ger $5 + 10 + 10 + 10 + 10 = 45$ Torn med 6 ger $6 + 14 + 14 + 14 + 14$ $\begin{array}{r} 20 \\ 28 \\ 14 \\ \hline 62 \end{array}$
$6 + 6 = 12$ $6 + 12 = 18$ $18 + 6 = 24$ $24 + 4 = 28$	
$1 + 2 + 3 + \textcircled{4} + 3 + 2 + 1 = 16$ $1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12$	$4 \cdot 4 = 16$ $4 \cdot 3 = 12$ $4 \cdot 2 = 8$ $4 \cdot 1 = 4$ Svar: 46 $\begin{array}{r} 2 \\ 16 \\ 12 \\ 8 \\ 4 \\ \hline 46 \end{array}$

Grafisk (G)

Att rita tornet gjorde att eleverna var tvungna att tänka på tornet i olika delar. Det kunde göras på skilda sätt. Olika uppdelningar leder också till olika metoder för att beräkna det totala antalet kuber.

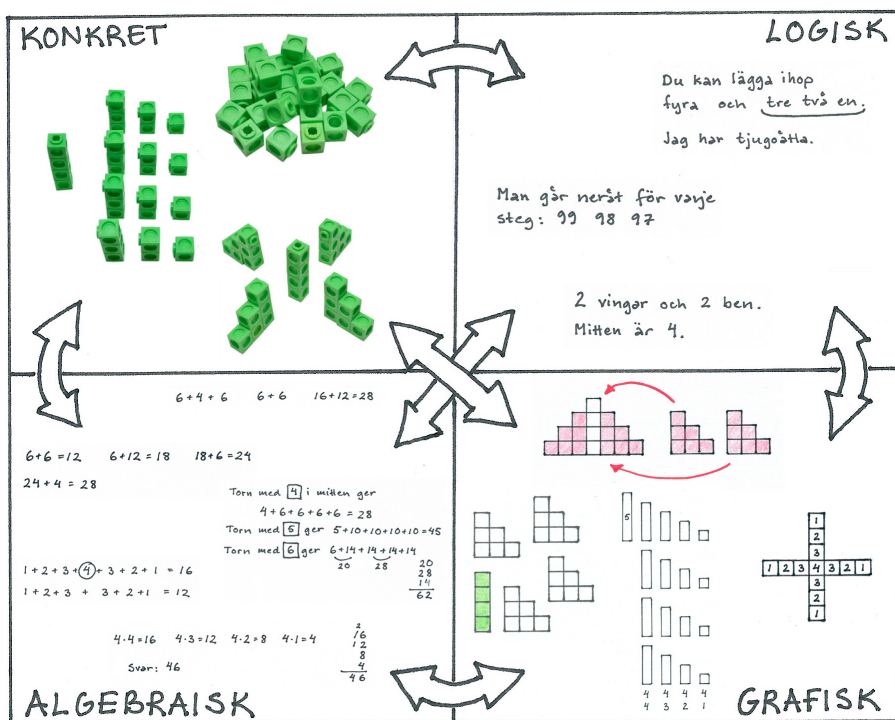


I många grafiska lösningar fanns också tecken på systematik. Nedan ser vi två olika exempel när elever fokuserar på höjder. Eleven till vänster har delat upp tornet i höjder, sorterat dem och dokumenterat antalet av varje höjd. Eleven till höger har avbildat tornet uppifrån och skrivit höjden på varje ställe. Nästa steg kan vara att sammanställa detta i en tabell.



Att zappa mellan olika uttrycksformer

En uttrycksform är oftast inte tillräcklig för att lösa en uppgift och kommunicera lösningen. För det här problemet visade det sig särskilt framgångsrikt att kombinera grafiska och algebraiska/aritmetiska uttrycksformer. Att rita tornet verkade vara ett försteg till att komma på ett sätt att systematiskt beräkna det totala antalet kuber. Flera elever upptäckte också att det var lättare att bokföra antalet kuber med hjälp av tal än att rita ut varje kub. Här fick eleverna chansen att upptäcka det matematiska symbolspråkets användbarhet. Läraren kan resonera med eleverna kring vad som händer om höjden ökar med en kub och visa hur de kan hålla reda på sina resultat i en tabell.

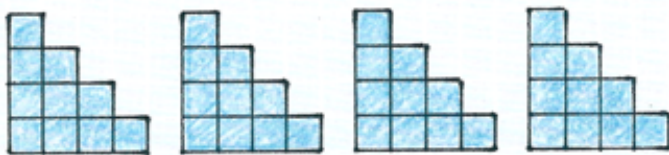


Lärare märker snabbt att den konkreta uttrycksformen inte är tillräcklig för att leda fram till generella slutsatser. För de yngre eleverna är det till stor nytta att resonera med hjälp av språket när de ska börja upptäcka mönster. Att hitta olika strategier för hur de kunde räkna ut antalet kuber i ett torn, samt hur många kuber tornet med höjden 100 bestod av, var en aha-upplevelse som hela klassen fick ta del av i slutet av lektionen.

De representationer vi har visat är i linje med vad som går att förvänta sig av elever i denna åldersgrupp. Det ger också en bild av vad en godtagbar lösning på problemet kan vara och hur man genom diskussion i klassen kan uppmärksamma elevernas systematik och formuleringar av regler. Även om läraren inte tar upp formler är det viktigt att ställa stödfrågor, och på så sätt så ett frö som senare kan leda till generaliseringar. I lägre årskurser kan en diskussion handla om olika sätt att se tornets delar, för att uppmuntra till att upptäcka mönster. En uppföljande diskussion kan handla om olika sätt att räkna ut antalet kuber, och jämföra olika aritmetiska uttryck med varandra, och sätt att dela upp tornet. I högre årskurser kan undervisningen fokusera mer på att uttrycka mönstret algebraiskt och att eleverna ser hur olika algebraiska uttryck hänger ihop med olika sätt att dela upp tornet.

Problem med problemet

Som i många rika problem finns det flera olika aspekter att ta upp för diskussion. Det kan därför vara viktigt att tänka igenom vad fokus ska vara för just din klass, när ni arbetar med problemet. Det har betydelse för hur du lägger upp aktiviteten och vilka frågor du ställer till eleverna. Om det är viktigt att alla uppfattar tornet på samma sätt, kan det vara bra att planera in en stunds diskussion kring olika uppfattningar, som huruvida det finns kuber i mitten av tornet, och vilka delar man kan få. Ett vanligt misstag är att räkna med mittstolpen i alla trapporna:

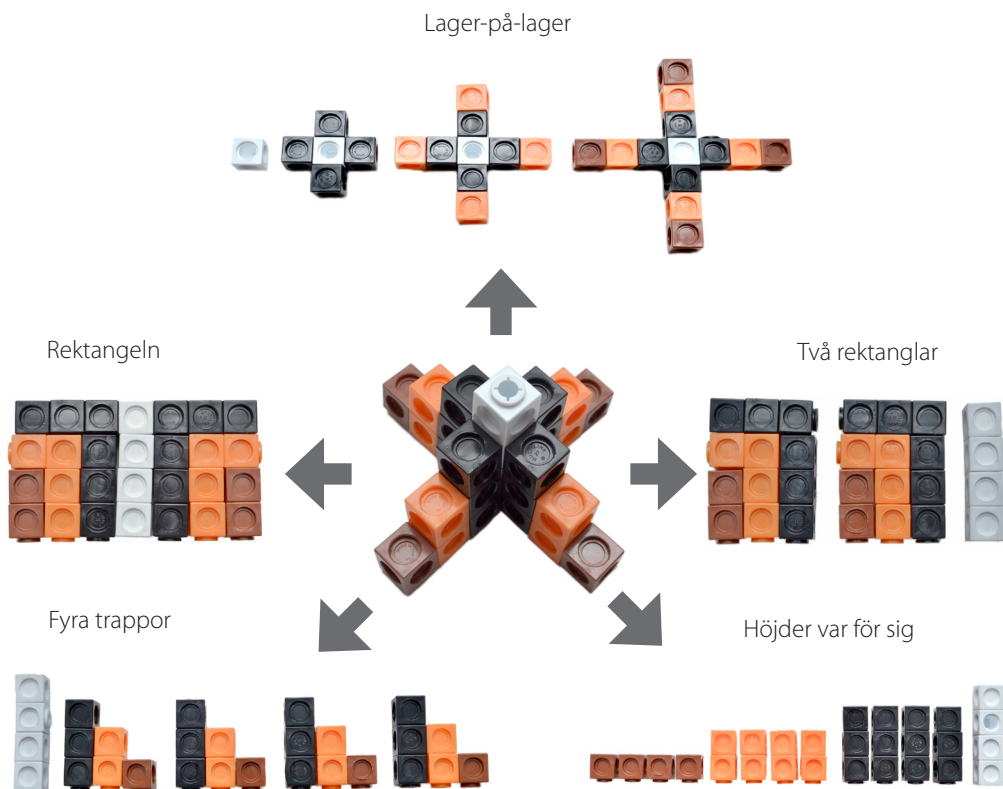


Det är viktigt att inte tillskriva konkret material alltför stor betydelse. Det var ingen som hittade generella strategier med hjälp av endast konkret material. Att låta eleverna prova sig fram är viktigt, men också att sedan gå vidare till andra uttrycksformer. Att behöva rita av tornet verkade vara en bro över till aritmetiska uttryck och mönster.

Första gångerna en klass arbetar med ett problem med olika lösningar kan det vara svårt för vissa elever att acceptera att det inte finns ett korrekt sätt. Det är därför extra viktigt att läraren lyfter fram olika lösningar så att alla elever känner igen sig och blir bekräftade i sina strategier. I en grupp blev en elev nedröstad när hen föreslog att de kunde bygga tornet lager för lager. Då gick klassen miste om ett sätt att se tornet som kunde gett upphov till ett annat talmönster.

Fastän uppfattning av tornets form och sätt att hitta mönster i hur det kan delas upp är rimliga uppgifter för elever i åk 3–6 är formeln för antalet kuber i tornet ganska komplicerad då den innehåller en kvadratisk term: $n(2n - 1) = 2n^2 - n$. Vi såg att redan antalet kuber i en trappa var en utmaning för de flesta eleverna

i åk 3. Det var också svårt för eleverna att komma på att de kan "pussla om" trapporna. Detta kan vara lättare för äldre elever, vilket kan leda till fler olika lösningar. I högre årskurser kan också de många olika alternativen att dela upp tornet i delar leda till olika algebraiska uttryck. Detta kan i sin tur vara utgångspunkt för en diskussion kring att ett mönster kan beskrivas med olika uttryck och hur man kan veta ifall uttrycken är ekvivalenta.



Det finns många sätt att arbeta vidare med problemet. Eleverna kan till exempel hitta på egna torn eller figurer och upptäcka mönster. När elever ska hitta på egna problem kan man med fördel använda sig av enhetspapper som passar i storlek till de kuber som används, exempelvis tvåcentimeterrutat papper. Det ger stöd i att avbilda tredimensionella objekt och finns att ladda ner och skriva ut på NCM:s webbplats, ncm.gu.se/matematikpapper.

LITTERATUR

- Gleisner, F. (2014). *Bilder och byggen är bra även för de bästa matematikelevna – en studie om femteklassare som löser rika problem*. Kalmar/Växjö: Linnéuniversitetet.
- Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem, inspiration till variation*. Malmö: Elanders Berglings förlag AB.
- Hedrén, R., Taflin, E., & Hagland, K. (2005). *Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till?* Nämnaren 2005:1.

Artikeln publicerades ursprungligen i Nämnaren 2018:4.