



Algebra – en x-tra utmaning

Det finns många tillfällen då kunskaper i algebra underlättar problemlösning. Inledningsvis kan elever komma långt med kloka resonemang och på sikt ska resonemangen bli allt mer generella. Här ges några problem i helt olika kontexter men med algebra som en gemensam nämnare.

4475 Köpa leksaker

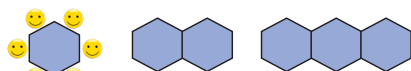
Nelly köpte fyra leksaker. Hon jämförde priset på dem:



Vilken leksak är dyrast?

4476 Hexagonformade bord

Emil gör långbord av hexagonformade bord så som bilderna visar. På varje fria sida kan det sitta en person.



Hur många personer får plats vid Emils långbord?

4477 Werner skriver tal

Werner skriver ner några tal. Summan av talen är 22. Ria subtraherar vart och ett av Werners tal från 7. Summan av Rias nya tal är 34. Hur många tal skrev Werner ner?

4478 Frågesport

I en frågesport med 20 frågor ger varje rätt svar 7 poäng. Varje fel svar ger -4 p. Om inget svar lämnas blir det 0 p. Eric fick 100 p. Hur många frågor svarade han inte på?

4479 Kulor på balansvåg

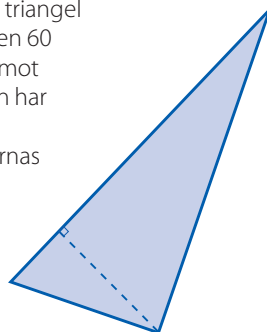
En balansvåg väger jämnt när det ligger tre gröna kulor på ena sidan och sex blå kulor på andra sidan.

Två gula kulor väger jämnt med fem blå kulor och sex blå kulor väger jämnt med fyra vita kulor.

Hur många blå kulor behövs för att de ska väga lika mycket som fyra gröna, två gula och två vita kulor?

4479 Rätvinklig triangel

En rätvinklig triangel har omkretsen 60 och höjden mot hypotenusan har längden 12. Bestäm sidornas längder.



Svar och lösningsförslag

4475 Svar: Dockan är dyrast.

Den första likheten ger att haren är dyrare än tornet. Den andra likheten ger att dockan är dyrare än haren, alltså är dockan dyrare än både tornet och haren.

Lägger vi på ett torn på vardera sidan om likhetstecknet i likhet 2 och jämför det med likhet 3 så ser vi att nallen är dubbelt så dyr som tornet. Första likheten ger att haren är värd tre gånger så mycket som tornet. Alltså är dockan den dyraste leksaken.

Om tornets värde sätts till 1 ger de två första likheterna att haren är värd 3 och dockan $1+3=4$. Nallen + haren är då värda 5 tillsammans, och eftersom haren är värd 3 är nallen värd 2. Så dockan är dyrast och tornet är billigast.

4476 Uppgiften är lämplig som problemlösningssuppgift i helklass där eleverna diskuterar olika förslag på hur man kan tänka för att komma fram till den generella formeln.

Verbalt	Med tal	Algebraiskt
4 platser på varje bord plus 1 på varje kant	$1+4+4+\dots+4+4+1$ n stycken fyror	$4n+2$
5 platser på första och sista bordet och 4 platser på borden emellan	$5+4+4+\dots+4+4+5$ $(n-2)$ stycken fyror	$4\cdot(n-2)+10$ $4(n-2)+10$
2 platser på varje bord i överkant, 2 på varje i underkant och 1 på varje kant	$2\cdot(2+2+\dots+2+2)+1+1$ n stycken tvåor i parenteser	$2\cdot(2\cdot n)+2$ $2(2n)+2$
6 platser på varje bord minus 2 på alla skarvar. Antalet skarvar är 1 färre än antal bord	$(6+6+\dots+6+6)-(2+2+\dots+2+2)$ n stycken sexor men $(n-1)$ stycken tvåor	$6\cdot n-2\cdot(n-1)$ $6n-2(n-1)$

4477 Svar: Werner skrev åtta tal.

Summan av alla Werners och Rias tal är $22+34=56$. Om vi tittar på summan av ett av Werners tal, n , och motsvarande Rias tal, $7-n$, så får vi att $n+(7-n)=7$. Så antalet sådana par av tal måste vara $56/7=8$. Werner skrev alltså ner åtta tal.

4478 Svar: Det var en (1) fråga han inte svarade på.

Låt F vara antalet felsvar och X antalet obesvarade frågor. Då blir antalet korrekta svar $20-F-X$.

Om vi kopplar till antalet poäng: $7(20-F-X)-4F=100$. Förenkling ger $11F+7X=40$. F kan som mest vara 3.

Om vi testar alla små värden 0, 1, 2, 3 för F så finner vi den unika lösningen $F=3$ och $X=1$.

4479 Svar: Det behövs 16 blåkulor.

Vi vet att

3 gröna = 6 blå

2 gula = 5 blå

4 vita = 6 blå.

Det vill säga: 4 gröna + 2 gula + 2 vita = 8 blå + 5 blå + 3 blå = 16 blå.

4480 Svar: Sidornas längder är 15, 20 och 25.

Låt c vara längden på hypotenusan och a och b längderna på kateterna. Detta ger triangelns area på två olika sätt:

$$\frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot c.$$

Förenkling ger $ab=12c$. Vi vet också att $a^2+b^2=c^2$ och $a+b+c=60$.

Den sista likheten av de tre ger: $a+b=60-c$.

Om vi kvadrerar båda leden får vi: $(a+b)^2=(60-c)^2$.

Utveckling av vänstra parentesen ger: $a^2+2ab+b^2=(60-c)^2$.

Omskrivning av den första likheten ovan: $ab=12c \rightarrow 2ab=24c$. Samtliga termer i vänsterledet kan bytas ut mot termer med c . Eftersom $a^2+b^2=c^2$ samt $2ab=24c$ fås ekvationen: $c^2+24c=(60-c)^2$.

Lösning av ekvationen ger $c=25$. Av likheter ovan fås: $ab=300$ samt att $a+b=35$. Detta ger $a=15$, $b=20$ och $c=25$.

Jenny Karlsson & Annalena Önnhed