GUNILLA BORGEFORS

Räta linjer på dataskärmen

En illustration av rekursivitet

På en dataskärm är alla linjer prickade eftersom bilden byggs upp av små lysande punkter. Artikeln beskriver problematiken med att analysera en mängd punkter på en skärm och avgöra om de är digitaliseringen av en rät kontinuerlig linje eller ej.

På en dataskärm går det inte att rita kontinuerliga kurvor, eftersom skärmen består av ett antal lysande punkter. Alla linjer blir prickade – om man tittar tillräckligt noga. Det ger upphov till tre frågor:

- Hur definieras en rät linje som består av enskilda punkter?
- Hur ritar man en rät linje på skärmen?
- Hur avgör man om ett antal givna punkter är en rät linje?

Den första frågan har många svar. Den vanligaste definitionen av digitala räta linjer ger linjer som upprepar samma mönster i alla skalor. Att rita en linje är inte så svårt, men att analysera en mängd punkter för att se om de kan vara digitaliseringen av en rät kontinuerlig linje är lite knepigare. Det är främst detta den här artikeln handlar om.

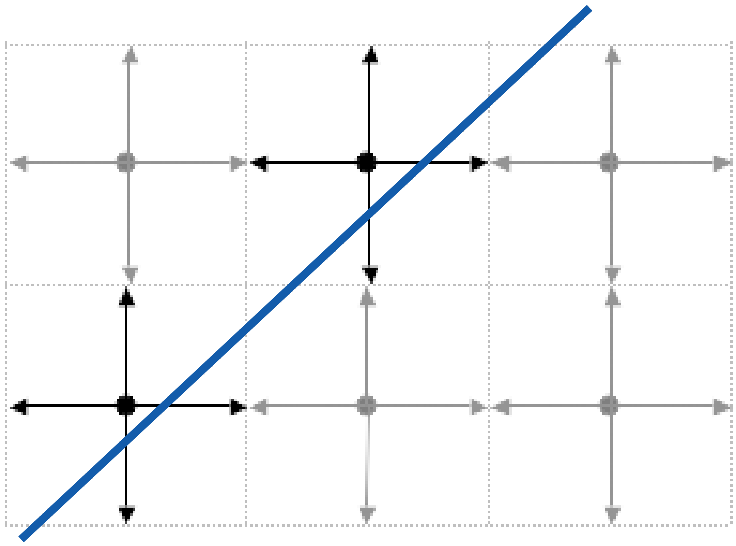
På 1960-talet började forskarna stoppa in bilder i datorer. En digital bild består av ett antal diskreta punkter och representeras i datorn av en matris. Området runt varje punkt kallas en pixel, som har en viss grånivå eller färg. Begreppen digital och diskret är inte synonymer. Diskret betyder att rummet vi arbetar i består av enstaka punkter, men säger ingenting om vilket mönster punkterna har. Digital är lite luddigare, men i geometriska sammanhang innebär det att punktmönstret är regelbundet, så att pixlarna, till exempel, blir kvadrater eller regelbundna sexhörningar.

Den datoriserade bildbehandlingen blev startpunkten för ett helt nytt intresse för diskret geometri. Eftersom dataloger dagligen hanterade digitala bilder var det naturligt att det var dessa som började systematisera geometriska begrepp i bilderna, så många grundläggande resultat inom diskret geometri publicerades i datorlitteraturen från mitten av 60-talet och framåt. Den mest framstående inom området var då Azriel Rosenfeld vid Marylands universitet strax norr om Washington D.C. i USA. Många anser att han är hela den datoriserade bildanalysens fader.

Det är enklast att ge punkterna i bilderna heltalskoordinater. I matematiska termer är en digital bild då en funktion av heltalspunkterna i två dimensioner, det vill säga på $\boldsymbol{Z}^2$. Då blir pixlarna kvadratiska. Arbetet att ”översätta” geometriska begrepp och egenskaper från det kontinuerliga planet, $\boldsymbol{R}^2$, till heltalsplanet, $\boldsymbol{Z}^2$, är långt ifrån avslutat. Till exempel är diskreta ”räta linjer” ett mycket mer komplicerat begrepp än räta linjer i det kontinuerliga planet.

Forskning i diskret geometri pågår i hela världen, men kanske allra livligast i Frankrike. Numera är det matematiker snarare än dataloger som står för de nya resultaten. Och till skillnad från matematik och bildanalys i allmänhet finns just inom diskret geometri ovanligt många framstående kvinnor.

Det finns ett antal olika definitioner av ”digital rät linje”. Den äldsta, enklaste och den vi kommer att använda här illustreras i



Figur 1. *Sex punkter i planet med tillhörande pixlar (prickade linjer). Varje punkt har fyra armar med längden en halv. Den digitala motsvarigheten till den blå, kontinuerliga, linjen består av de punkter vars armar korsas av den, här de svarta punkterna.*

figur 1. Varje heltalspunkt i planet ges fyra ”armar”. När en kontinuerlig linje digitaliseras undersöker vi vilka armar den korsar. Den digitala linjen består av de motsvarande punkterna. Det kan förstås hända att linjen går precis genom slutpunkten på en arm. Därför förutsätter vi att slutpunkterna i den övre och den vänstra armen ingår i korset, medan slutpunkten på den undre och den högra armen inte gör det.

En digital linje konstruerad på detta sätt kommer att vara både tunn och sammanhängande. Det betyder att den aldrig är mer än en pixel tjock och att pixlarna hänger ihop antingen kant-mot-kant eller hörn-mot-hörn.

Att rita dessa linjer är ganska lätt. Datorgrafikern Jack Bresenham, då vid IBM, konstruerade tidigt en algoritm och motsvarande datorprogram som med mycket få operationer ritar en linje på dataskärmen. Därför kallas de här linjerna ofta Bresenham-linjer.

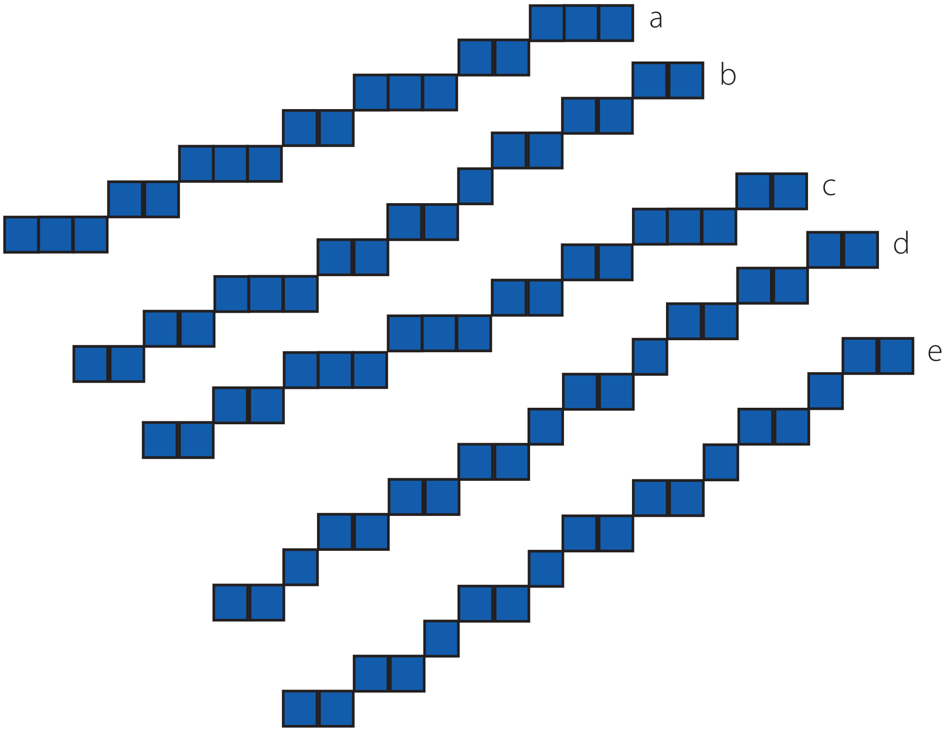
Ett intressantare problem är det omvända. Förutsätt att vi har ett antal punkter i planet. Frågan är om de kan vara digitaliseringen av en rät linje. Problemet löstes av Rosenfeld i en artikel i *IEEE Transactions on Computers* (Rosenfeld, 1974).

I figur 2 finns exempel på fem tunna digitala kurvor som vid första anblicken skulle kunna vara räta linjer. Men bara två av dem är det. Kurva *a* i figur 2 består av två olika ”block” med längderna två respektive tre pixel. Ett block består av pixlar som sitter ihop kant-mot-kant. Kurva *b* består av tre olika block, med längderna ett, två och tre pixel.

En digital rät linje består av högst två olika block. Kalla det korta blocket K^0, med längd l_K, och det långa blocket L^0, med längd l_L. I en rät linje finns antingen bara ett block eller också gäller att det långa blocket är en pixel längre än det korta; $l_L = l_K + 1$. Kurva *b* är alltså ingen rät linje. Kurvorna *a*, *c*, *d* och *e* uppfyller däremot block-kravet.

Nästa villkor säger att det ena av de två blocken *K* och *L* bara får finnas en gång mellan det andra blocket. Däremot finns det ingen begränsning på hur många gånger det andra blocket upprepas. Serierna *KKLKKKLKK* och *LLKLLKL* är alltså möjliga, men inte serien *KKLLKKLL*. Vilket av de två blocken som ligger enstaka beror på linjens lutning. Kurva *c* i figur två är inte en digital linje eftersom den bryter mot denna regel.

I fortsättningen förutsätter vi, för enkelhets skull, att det är det korta blocket som bara förekommer en gång. Kurvorna *a*, *d* och *e* uppfyller båda villkoren: långa blocket är en pixel längre än det korta och det korta



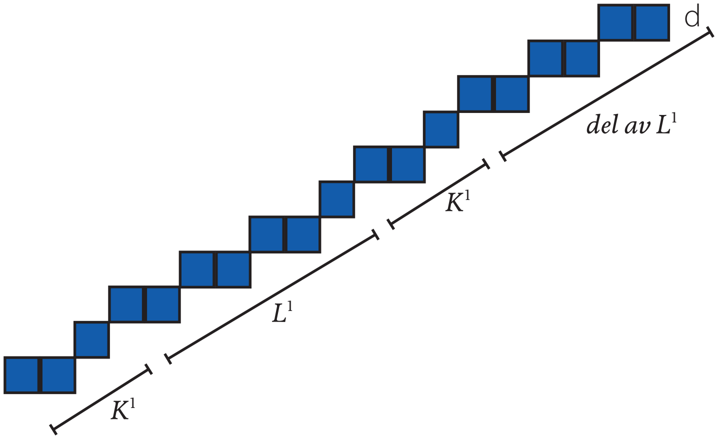
Figur 2. *Fem digitala kurvor. Två är digitala linjer.*

blocket förekommer aldrig mer än en gång. Men detta räcker inte som villkor för rät linje. Nu kommer rekursiviteten in.

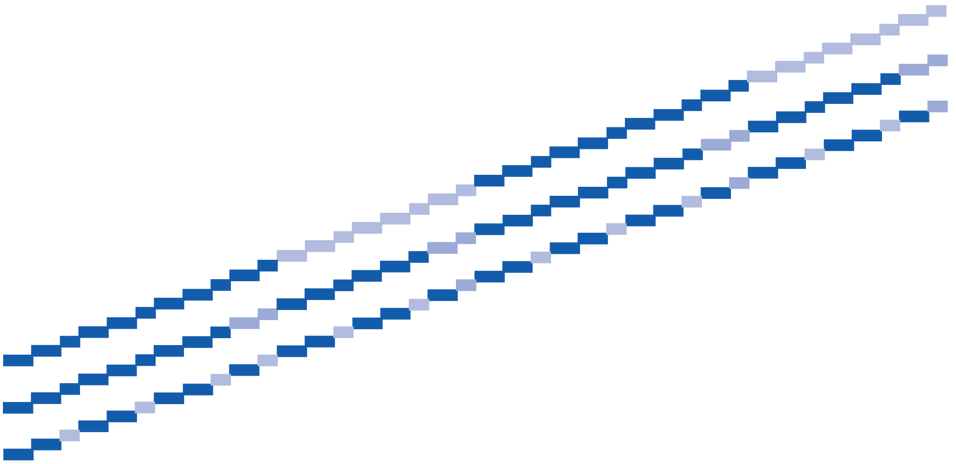
Genom att gruppera första nivåns block, L^0 och K^0, bildar vi nästa nivå av block, som består av ett antal L^0 och ett avslutande K^0. I kurva *d* får vi de nya blocken $L^1 = L^0L^0L^0K^0$ och $K^1 = L^0K^0$. De nya blocken illustreras i figur 3. Observera att det övre L^1-blocket inte är fullständigt.

Precis som de ursprungliga blocken K^0 och L^0 bara får skilja sig en pixel i längd så får antalet L^0 i de nya blocken bara skilja sig i antal med ett: alltså $K^1 = nL^0K^0$ och $L^1 = (n+1)L^0 K^0$. Kurva *d* är alltså inte en rät linje. I kurva *a* blir det nya blocket $K^1 = L^0K^0$. Kurvan består bara av detta block, så det är en rät linje.

Även för de nya, större blocken gäller regeln att det ena blocket bara får finnas en



Figur 3. *Kurva d får de nya blocken $L^1 = L^0L^0L^0K^0$ och $K^1 = L^0K^0$.*



Figur 4. *En digital linje (nederst), uppdelad i första nivåns block (mitten) och andra nivåns block (överst).*

gång. Serien $L^1L^1K^1K^1L^1L^1$ är alltså inte tillåten. I kurva *e* får vi de två nya blocken $L^1=L^0L^0K^0$ och $K^1=L^0K^0$. Och de ligger i serien $L^1K^1L^1K^1L^1$. Kurva *e* är alltså en rät linje.

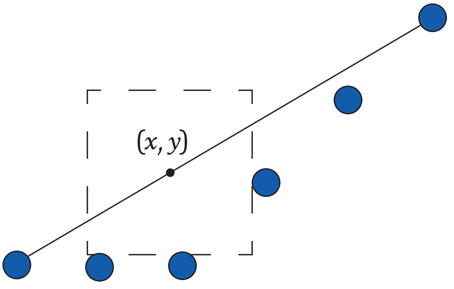
Processen att skapa nya nivåer av block kan fortsättas hur många gånger som helst. I kurva *e* får vi $K^2=L^1K^1$. Reglerna är alltid desamma: Högst ett stegs längdskillnad och det ena blocket förekommer bara enstaka. Om den kurva man undersöker uppfyller detta på så många nivåer som behövs är den en digital rät linje.

I figur 4 finns en längre digital kurva. Är det en digitalisering av en kontinuerlig rät linje? Blocken på första nivån består av *två* (K^0, ljusblå) och *tre* (L^0, mörkblå) pixlar och det korta blocket finns alltid ensamt. Kraven är uppfyllda. På nästa nivå har vi $L^1=L^0L^0K^0$ (mörk) och $K^1=L^0K^0$ (ljus). Det korta, ljusa, blocket är alltid ensamt. Det stämmer. På nästa nivå är $L^2=L^1L^1L^1K^1$ (mörk) och $K^2=L^1L^1K^1$ (ljus), vilket följer reglerna. Och på nästa får vi $K^3=L^2K^2$. Kurvan kan nu beskrivas som K^3K^3. På tredje nivån finns bara ett block vilket betyder att kurvan är en digital rät linje.

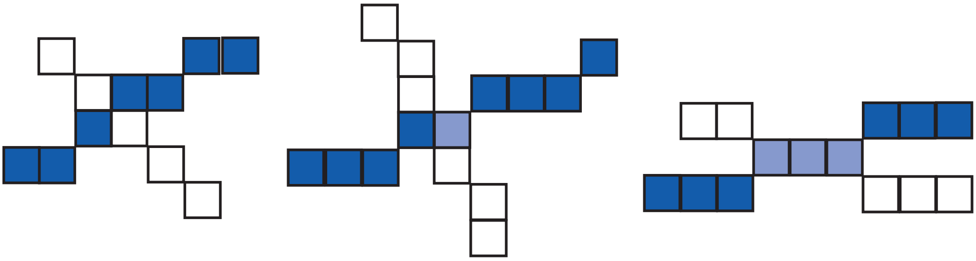
Det kan förstås förekomma att blocken i början och slutet av kurvan inte är fullständiga. Så länge det går att fortsätta kurvan enligt reglerna är det ändå en digital linje. Exempel kan vara *KLLLLK* eller *LKLLLLKLLLKL*. De kan (till exempel) kompletteras till *LLL**KLLLK*** och *LLL**KLLLLKLLLKL**LL*, där ursprungliga kurvan är fet.

Vad Rosenfeld egentligen observerade i sin artikel var att alla digitala linjer har den så kallade korda-egenskapen, som innebär följande: Dra en rät, kontinuerlig linje, alltså en korda, mellan två punkter i den digitala kurvan. För varje (reell) punkt (x, y) på linjen ska det finnas minst en (digital) punkt i kurvan som ligger inuti en kvadrat med centrum i (x, y) och sidlängden två. Det räcker inte att det finns en punkt på kvadratens sida, den måste verkligen ligga inuti kvadraten (se figur 5). De rekursiva reglerna för block och blocklängder följer av korda-egenskapen.

Det finns ett antal andra definitioner av digitala räta linjer. Det beror bland annat på att Bresenham-linjerna har en del otrevliga egenskaper. Till exempel kan två linjer



Figur 5. *De blå punkterna uppfyller inte korda-egenskapen. Det finns en punkt (x, y) på kordan som ligger alltför långt från alla blå punkter, eftersom ingen av punkterna ligger i det inre av kvadraten runt (x, y).*



Figur 6. *Digitala linjer (vita och mörkblå) som korsar varandra med ingen, en eller flera gemensamma punkter (ljusblå).*

korsa varandra utan att ha någon gemensam punkt (se figur 6).

Att skärningspunkter mellan digitala linjer kan bestå av många punkter är oundvikligt om de har lutningar som inte skiljer sig så mycket från varandra. Det finns helt enkelt inte tillräckligt många pixlar för att skilja på närliggande linjer. Att två linjer kan smita igenom varandra utan en gemensam punkt är däremot en nackdel och strider dessutom mot intuitionen. Det betyder bland annat att bildbehandlare inte kan hitta korsningar för linjer och kurvor genom att helt enkelt leta efter gemensamma pixlar.

En lösning på korsningsproblemet är att bara tillåta att pixlarna i linjen sitter ihop kant-mot-kant, vilket ger tjockare linjer. En annan bygger på att punkter med jämna och udda koordinater behandlas olika. Men bara Bresenham-linjerna har de tre egenskaperna att vara tunna, sammanhängande och uppfylla korda-egenskapen.

Azriel Rosenfeld

Azriel Rosenfeld var som sagt en förgrundsfigur inom digital bildanalys. Han föddes 1931 i New York. Efter studier och en kort utflykt till industrin blev han redan som 33-åring professor vid Maryland-universitetet i den lilla staden College Park. Där blev han kvar till sin död 2004, ständigt verksam nästan in i det sista. Förutom sin egen forskning som främst, men långt ifrån enbart, handlade om digital geometri, hade han en otrolig överblick över ämnet och visste precis vem som gjort vad över ett mycket stort fält. Varje år gjorde han en sammanställning över tusentals vetenskapliga publikationer inom bildanalys i vid mening. Han hade själv läst varje artikel och klassificerat den i rätt fack. ”Rosenfelds lista” var länge bästa sättet att få veta vad som hänt inom bildanalysområdet.

Rosenfeld fick många utmärkelser och var ofta inbjuden talare vid bildanalyskonferenser. Men han var inte en okomplicerad gäst. Det var nästan omöjligt att bjuda honom på något att äta. Han var jude och höll mycket hårt på koscher-reglerna om vilka ingredienser som är tillåtna och hur de ska tillagas. Men en glass gick bra. Rosenfeld reste alltid med en stor påse nötter som nödproviant.

En annan osäkerhetsfaktor var att organisatörerna aldrig visste vad Rosenfelds föredrag skulle handla om, även om innehåll och titel hade bestämts långt i förväg. Eller kanske speciellt då. Det hände att han fick en ny idé i flygplanet på väg till konferensen, och då var det den han ville prata om snarare än något han arbetade med för några månader sedan.

Azriel Rosenfeld funderade inte bara på problem inom digital geometri. I rymdålderns barndom, 1964, skrev han en artikel om när en jude bör fira sabbat i olika omloppsbanor runt jorden, på månen, på Mars och på långa rymdresor mellan stjärnorna. Han har olika lösningar i olika fall – och ingen av dem förfaller till den naiva lösningen att helt enkelt hålla Jerusalem-tid. Kolonisatörerna på Mars bör till exempel följa Mars astronomiska förhållanden, inte jordens. Medan välsignelsen av nymånen bör vara en rent jordisk ceremoni.

LITTERATUR

Rosenfeld, A. (1964). The Sabbath in the space age. *Tradition* (Summer 1964). (http://www.lookstein.org/articles/shabbatinspace.htm)

Rosenfeld, A. (1974). Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers*, C-23 (12), 1264–1269.

Artikeln publicerades ursprungligen i Nämnaren 2008:1.