Thomas Lingefjärd, Djamshid Farahani & Güner Ahmet

En motorcykels färd kopplad till derivata

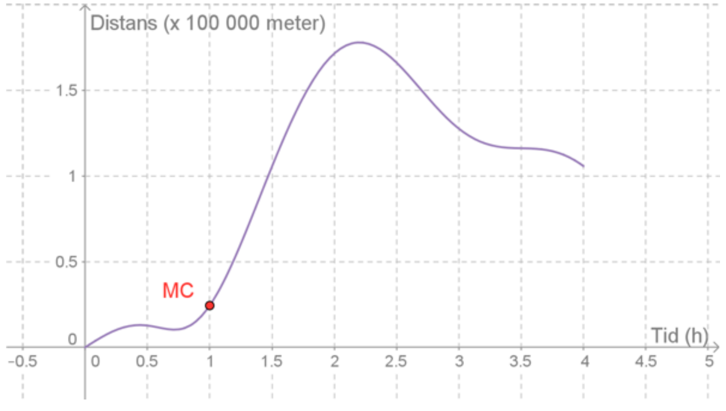
Gymnasieelevers erfarenhet av upplevda hastighetsförändringar ligger till grund för arbete med begreppet derivata. Genom de dynamiska möjligheter som finns i Geogebra kan eleverna följa en motorcykels färd.

För elever i gymnasieskolan är det inte uppenbart hur derivata relaterar till deras vardag. En del tror nog att proceduriella deriveringsregler är det viktigaste inom detta område. Från gymnasiets ämnesplan:

> *Genom undervisningen ska eleverna ges möjlighet att använda matematik i olika sammanhang som kan uppstå i vardagen och i yrkeslivet. Undervisningen ska också leda till att eleverna utvecklar förmåga att använda digital teknik och andra redskap som kan användas för att lösa matematiska problem.*
>
> *Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmåga att föra och följa matematiska resonemang. Genom undervisningen ska eleverna också ges möjlighet att utveckla förmåga att bedöma giltigheten i matematiska resonemang.*

Elever som kommer till gymnasieskolan har upplevt hastighetsförändringar via bilfärder, cykelfärder och kanske skidåkning långt innan de möter begreppet derivata och därför förefaller hastighetsförändring vara relevant att använda både vid introduktion och fortsatt arbete med begreppet derivata.

Vi anser att undervisning inriktad på en situation som kan relateras till verkliga livet underlättar lärande av derivata. Ett undersökande arbetssätt är för det mesta intressant för flertalet elever och vi börjar därför med att introducera en grafisk representation av en motorcykels färd. Motorcykeln startar från en plats vid tiden noll och vi studerar dess färd under ett tidsspann på fyra timmar.



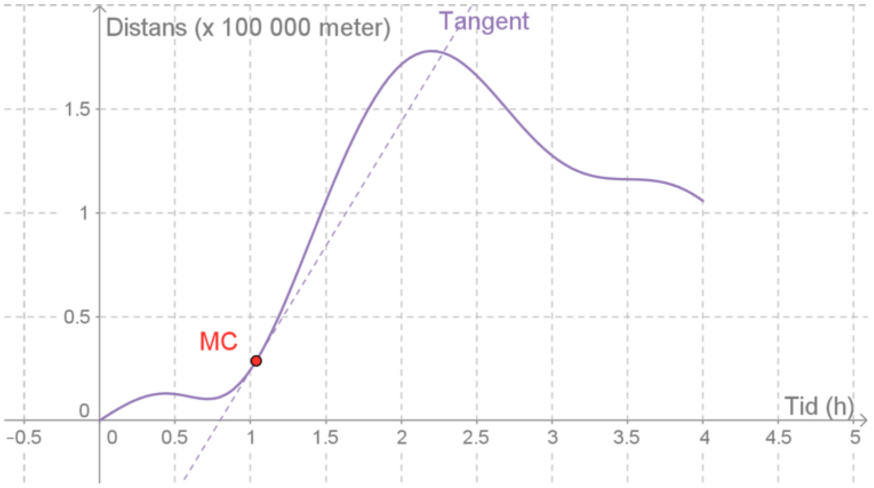
En motorcykel och dess färd under fyra timmar illustrerad i ett koordinatsystem.

Vi vill poängtera att detta är en metod för matematikundervisning i gymnasieskolan och inte främst avsett för fysikundervisning. Även elever som inte läser fysik har uppfattningar om färd, hastighet och acceleration.

Det är inte trivialt att avläsa en grafisk representation och det kan behöva få ta sin tid att lära sig. Elever kan exempelvis tolka den grafiska representationen av motorcykelns färd som att den kör uppför en kulle. Det är viktigt att läraren tar upp denna alternativa tolkning och hjälper eleverna att inse att den inte håller. Elever behöver också kunna tolka koordinatsystemet och förstå hur de avläser motorcykelns färd. Låt gärna eleverna arbeta enligt EPA-modellen (enskilt, par, alla) under flera lektioner med denna aktivitet. Ett exempel är att under första delen av lektionen ge eleverna möjlighet att på egen hand fundera över egenskaperna hos grafen och göra en tolkning. Därefter bildas lämpliga elevpar som arbetar vidare och slutredovisningen genomförs i helklass. Tiden som det tar eleverna att tolka och resonera om denna situation kan naturligtvis variera beroende på kurs och tidigare kunskaper.

Förmåga att överbrygga skillnader

Det krävs att en betraktare av en grafisk representation kan relatera till olika begrepp som finns i representationen. Den kritiska aspekten av att kunna växla mellan och inom olika representationer har tagits upp i många olika studier av elevers lärande. Forskare som exempelvis Daniel Breidenbach, Julie Hawks, Devilyna Nichols, Ed Dubinsky och Anna Sfard hävdar att förmågan att kunna överbrygga skillnaderna mellan symboliska och grafiska representationer till största del beror på hur väl den som tolkar har förstått relevanta begrepp som är relaterade till dessa representationer. Därför är det viktigt att låta elever resonera om vad de har tolkat i den grafiska representationen och kanske framför allt enas om att när motorcykelns förflyttning växer i den grafiska representationen så betyder det en positiv hastighet bort från startplatsen medan en hastighet riktad nedåt i den grafiska representationen betyder en negativ hastighet eller att motorcykelns kör tillbaka till startplatsen. Något som först kan vara svårt att inse är att rörelsen sker utmed en rät linje som sammanfaller med x-axeln för $0 \leq t \leq 4$.



Vi introducerar begreppet tangent illustrerat i ett koordinatsystem.

Från den grafiska representationen kan vi när vi studerar grafen se att motorcykeln inledningsvis kör ganska långsamt eftersom den bara har kommit 2,5 mil från startplatsen efter den första timmen. Någonstans efter cirka 25 minuter kör motorcykeln tillbaka mot startplatsen igen fram till cirka 45 minuter då motorcykeln förefaller svänga och åter köra bort från den. Därefter tycks motorcykeln köra allt fortare. Detta kan vi tolka i koordinatsystemet. Förmågan att tolka grafisk representation av rörelse behöver elever öva på.

- Vad är hastighet?
- Hur kan vi se hastighet representerad i en grafisk representation?

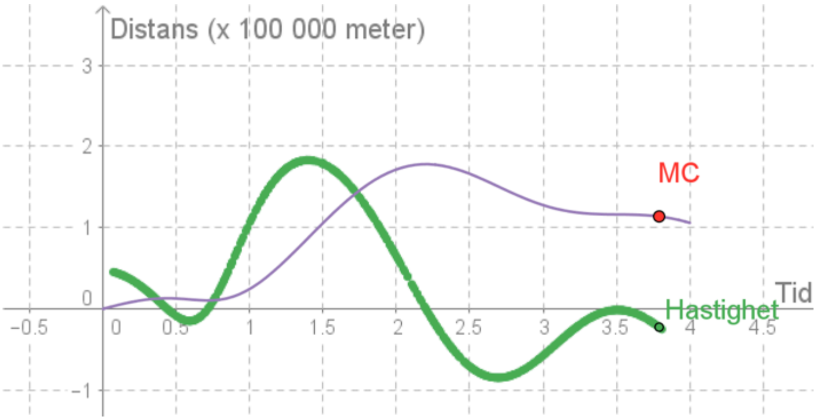
Vår erfarenhet är att elever i allmänhet uppfattar hastighet som den rörelse som äger rum under en viss tid. Ju snabbare som jag förflyttar mig från position A till position B desto högre hastighet har jag. Komna så här långt i samtalet kan det vara dags att introducera det matematiska begreppet tangent.

> *I matematik är en tangent definierad som en linje som skär en kurva $f(x)$ i en punkt och som dessutom i denna punkt har samma lutning som $f'(x)$.*

Nu kan det vara intressant att visa eleverna en dynamisk figur som kan integreras i den grafiska representationen. Du hittar den grafiska representationen av figuren ovan på www.geogebra.org/m/gAJAqZ6n. Ni kan dra i punkten som motsvarar motorcykeln och se hur tangentens lutning i varje punkt ändras med tiden. Här är det viktigt med ännu en definition.

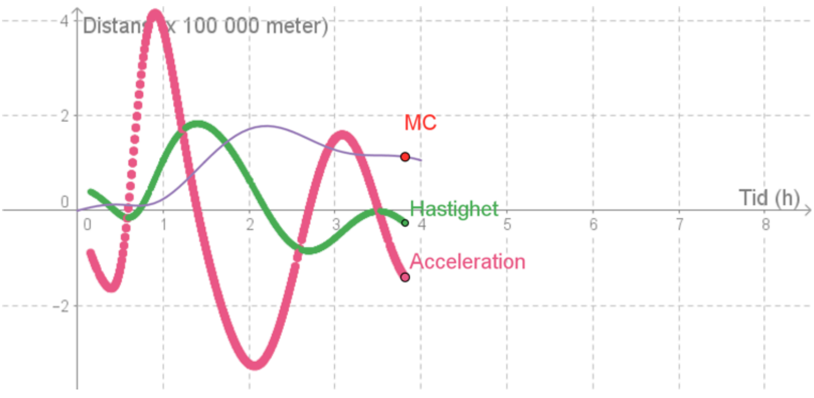
> *Antag att kurvan är en graf av en funktion $y=f(x)$ och att vi är intresserade av informationen i punkten (x_0, y_0) där $y_0=f(x_0)$. Kurvan har en icke-vertikal tangent i punkten (x_0, y_0) om och endast om funktionen är deriverbar i x_0. I detta fall är lutningen av tangenten given av $f'(x_0)$. Kurvan har en vertikal tangent i (x_0, y_0) om och endast om lutningen närmar sig $\pm$ oändligheten från motsatta håll.*

Nu kan vi följa hur hastigheten varierar när motorcykeln rör sig. Det kan vi göra med hjälp av en punkt som följer motorcykeln för varje värde på t längs x-axeln och som visar tangentens värde i y-led. Vi får nu en graf över hur hastigheten varierar, se den gröna grafen i figuren här nedan.



Vi låter Geogebra visa hur motorcykelns hastighet relaterar till dess läge med avseende på tiden.

Geogebra-appleten för figuren hittar du på www.geogebra.org/m/pvNQ65xU. Låt eleverna undersöka hur hastighetens grafiska representation hör samman med motorcykelns rörelse och be dem tolka vad de ser. Diskutera sedan hur ni ska abstrahera innehållet i en grafisk representation. Den gröna kurvan är egentligen derivatan av den blå kurvan, dvs hastighet kan ses som derivata av sträcka med avseende på tid. Den gröna kurvan har också lokala maximi- och minimipunkter och skär x-axeln, dvs är lika med noll, vid vissa tidpunkter. Vad gäller för motorcykelns förflyttning just då? Visa en grafisk representation av motorcykelns acceleration med avseende på tiden:



Figuren visar förflyttning, hastighet och acceleration i samma koordinatsystem.

Geogebra-appleten som figuren ovan beskriver finns på www.geogebra.org/m/v5cedNKX. Låt eleverna undersöka hur hastighet och acceleration hör samman med motorcykelns förflyttning och be dem tolka vad de ser.

Sammanfattande beskrivning

Vi kan nu ge en sammanfattande beskrivning av motorcykelns rörelse:

- Hastighet kan tolkas som förändring i objektets läge med avseende på tid, exempelvis en motorcykel.
- Acceleration är förändring av hastighet för ett objekt med avseende på tid.
- Hastighet definieras som derivatan av sträcka med avseende på tid vilket vi med symboler skriver som $v(t) = s'(t)$.
- Acceleration definieras som derivatan av hastigheten med avseende på tid vilket vi med symboler kan skriva som $a(t) = v'(t)$.
- Vi ser att acceleration är andraderivatan av förflyttning vilket vi med symboler kan skriva som $a(t) = s''(t)$.
- Det föreligger samband mellan förflyttningens extrempunkter och nollställen för hastighet och acceleration.

Nu finns underlag för att diskutera hur trolig modellen är över en motorcykels färd. Det är uppenbart i den grafiska representationen att motorcykeln har en initial hastighet, men hur ska vi tolka det? Ser vi egentligen motorcykeln starta? Påpeka också att det här sättet att se på rörelse även fungerar för andra föremål än för motorcyklar.

LITTERATUR

Breidenbach, D., Hawks, J., Nichols, D., & Dubinsky, E. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(4), 247–285.

Farahani, D. (2016). *Gymnasieelevers tolkningar avseende matematiska representationer av rätlinjig rörelse.* Licentiatavhandling framlagd vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (red). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (59–84). Washington DC: MAA.

Artikeln publicerades ursprungligen i Nämnaren 2017:1. De länkar som anges här i artikeln finns klickbara på Nämnaren på nätet, Tidigare nummer.

Under de senaste 15 åren har Thomas Lingefjärd skrivit en lång rad artiklar om Geogebra som publicerats i Nämnaren. År 2009 kom *Geogebra för nybörjare* och *Geogebra för gymnasieskolan*. 2012 återkom Thomas med två artiklar i en miniserie: *Vad varje matematiklärare borde kunna – Geogebra för nybörjare.* Mer specifika användningsområden för Geogebra som han skrivit om, ofta tillsammans med kollegor, är exempelvis: *Differentialekvationer och komplexta tal med Geogebra* (2014), *Med Geogebra i rymden* (2015), *Ett undersökande arbetssätt med problemlösning med Geogebra* (2015), *Introducera trigonometriska funktioner med Geogebra* (2016), *Att undervisa om gränsvärde med Geogebra* (2018).