

GeoGebra

Dynamiska matematikprogram i nya moduler

Författarna har skrivit texterna i de nya modulerna *Dynamiska matematikprogram i undervisningen* (årskurs 7–9 respektive gymnasieskolan) samt varit mentorer för två workshopserier. I denna artikel introduceras modulerna och några exempel som diskuterades vid workshopseriens träffar presenteras.

I en tidigare artikel, *Dynamiska matematikprogram – en outnyttjad resurs*, beskriver vi hur GeoGebra ger elever möjlighet att arbeta undersökande i matematik. I artikeln uppmärksammas att matematik är ett av de ämnen där digitala verktyg används allra minst. Skolverkets uppföljning av digitaliseringsstrategin visar dock att användningen av digitala verktyg i matematikundervisningen har ökat. Vid Karlstads universitet ser vi också att antalet nybörjarstudenter på civilingenjörsprogrammen med tidigare erfarenheter av GeoGebra har ökat de senaste åren. I den senaste enkäten (hösten 2023) angav 86 % av studenterna att deras gymnasielärare har använt dynamiska matematikprogram i undervisningen och 89 % av dem angav att de själva har använt program som GeoGebra.

Digitalisering av nationella prov

I samband med att de nationella proven digitaliseras bör användningen av dynamiska matematikprogram (såsom GeoGebra) utgöra en naturlig del av matematikundervisningen, eftersom denna typ av program kommer att finnas tillgänglig via den digitala provplattformen. Detta i sin tur innebär att matematiklärare som idag inte använder dessa verktyg i sin undervisning behöver stärka sin digitala kompetens. Dels handlar det om att själv kunna använda verktyget, dels om didaktiska kunskaper för att använda det i undervisningen.

Mot denna bakgrund erbjuder Skolverket kompetensutvecklingsstöd med fokus på dynamiska matematikprogram. Stödet består dels av modulerna *Dynamiska matematikprogram i undervisningen* (en för årskurs 7–9 och en för gymnasieskolan), dels av kompetensutveckling i form av *workshopserier*. Utbildningen erbjöds första gången under hösten 2023 vid ett antal lärosäten för att stötta lärare i arbetet med modulerna. Även om det är digitaliseringen av de nationella proven som är drivkraften bakom de nya modulerna, vill Skolverket lyfta användningen av dynamiska matematikprogram som lärvraktyg snarare än färdigheter som ska kontrolleras på ett nationellt prov.

Nya moduler om dynamiska matematikprogram

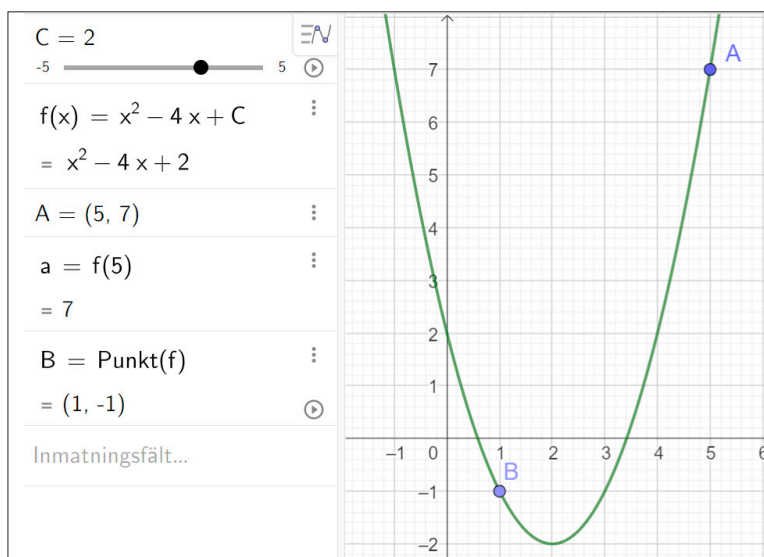
De två nya modulerna består av fyra delar och vänder sig i första hand till lärare som inte tidigare har använt eller endast har begränsade erfarenheter av att använda ett dynamiskt matematikprogram. Den övergripande progressionen är att lärare först bekantar sig med programmet för att själva lära sig grunderna innan de använder det som ett demonstrationsverktyg i undervisningen med sina elever. Nästa steg är att låta eleverna använda programmet, först genom att arbeta med dynamiska arbetsblad som innehåller färdigkonstruerade GeoGebra-applikationer och därefter använda programmet i sin helhet och genomföra konstruktioner på egen hand. I de två första delarna är det alltså fokus på lärares användning av verktyget och i de två sista är det elevernas användning som står i fokus.

Under hösten 2023 ansvarade vi vid Karlstads universitet för två workshopserier, en med inriktning mot årskurs 7–9 och en mot gymnasieskolan. Vi kommer att visa exempel på vad som behandlades vid de fyra gemensamma träffarna som är kopplade till respektive del i modulerna.

Del 1: GeoGebra – ett dynamiskt matematikprogram

Vid den första träffen presenterades GeoGebra. Olika konstruktioner demonstrerades för att visa hur programmet fungerar och vilka möjligheter det ger inom olika matematiska områden. Vidare diskuterades vilka uppgifter som är lämpliga att använda då elever har tillgång till GeoGebra. Till exempel diskuterades med gymnasielärarna hur tillgången till GeoGebra påverkar vad som krävs för att lösa några uppgifter från tidigare nationella prov. Bland annat diskuterades följande uppgift från provet för Ma2a, Ma2b och Ma2c, vt 2015 (från den del där digitala verktyg är tillåtna).

För funktionen f gäller att $f(x) = x^2 - 4x + C$ där C är en konstant. Punkten $(5, 7)$ ligger på funktionens graf. Bestäm koordinaterna för en annan punkt som också ligger på grafen. (2/0/0)



Figur 1.
Lösning med
GeoGebra

För att lösa uppgiften utan digitalt verktyg behöver eleven inse att problemet behöver lösas i 2 steg (först bestämma C och därefter en annan punkt på grafen).

1. Bestäm C genom att
 - inse att C kan bestämmas med hjälp av punkten $(5, 7)$
 - inse att $(5, 7)$ ligger på grafen $\Leftrightarrow f(5) = 7$
 - skapa ekvationen: $f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + C = 7$
 - lösa ekvationen: $5^2 - 4 \cdot 5 + C = 7$.
2. Ta fram ytterligare en punkt på grafen genom att
 - beräkna till exempel $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = -1$
 - inse att $f(1) = -1 \Leftrightarrow$ punkten $(1, -1)$ ligger på grafen.

Även för att lösa uppgiften med GeoGebra behöver eleven inse att problemet behöver lösas i 2 steg.

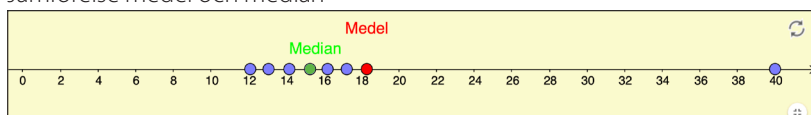
1. Bestäm C genom att
 - inse att C kan bestämmas med hjälp av punkten $(5, 7)$
 - mata in funktionsformeln i algebrafönstret, varvid grafen visas i ritområdet och en glidare C skapas (se figur 1)
 - dra i glidaren så att grafen går genom punkten $(5, 7)$, vilket blir tydligare om punkten $(5, 7)$ har matats in
 - eventuellt kontrollera genom att mata in $f(5)$.
2. Ta fram ytterligare en punkt på grafen genom att
 - lägga in en punkt på grafen med hjälp av punktverktyget *eller*
 - mata in till exempel $f(1)$ och inse att $f(1) = -1 \Leftrightarrow$ punkten $(1, -1)$ ligger på grafen.

Jämförelsen visar att en elev som har tillgång till GeoGebra kan lösa uppgiften utan att behöva beräkna funktionsvärden och utan att skapa och lösa ekvationen. Om ett syfte med uppgiften är att kontrollera eller öva dessa färdigheter så kan tillgången till GeoGebra ifrågasättas. Om vi istället ser på vilket mervärde användningen av GeoGebra kan tillföra, är det främst kopplingen mellan den algebraiska och grafiska representationen som tydliggörs. Genom att använda glidarverktyget kan eleven se hur värdet på C påverkar grafens utseende "globalt", det vill säga hur grafen i stort ändras när värdet på C ändras. Uppgiften uppmuntrar även till att observera speciella punkter på grafen. Att kunna växla mellan "globalt" och "lokalt" fokus har visat sig vara en viktig färdighet för att utveckla en djupare förståelse av funktioner. Det är alltså viktigt att väga det eventuella mervärdet mot risken att viktiga färdigheter inte längre övas eller testas när GeoGebra används. Reflektioner och diskussioner som i exemplet ovan är viktiga i samband med en ökad användning av dynamiska matematikprogram. Det blir även viktigt att reflektera kring nya typer av uppgifter som tar tillvara programmets potential.

Del 2: Demonstration i helklass

Andra delen handlar om hur lärare kan använda GeoGebra för att visualisera och diskutera matematiska samband i helklass. För att göra detta behöver läraren antingen göra en egen konstruktion i GeoGebra eller utnyttja någon av alla de resurser som andra användare av GeoGebra har delat på www.geogebra.org. Även om det finns många bra resurser på svenska så kan det vara intressant att använda någon resurs på annat språk. Till exempel finns det många väl genomarbetade resurser på engelska som kan vara intressanta att använda och göra till sina egna genom att kopiera, anpassa och översätta. Vid träffen tittade vi närmare på några befintliga resurser och diskuterade lämpliga frågor att ställa för att uppmuntra elever att delta i klassrumsdiskussioner. Bland annat diskuterade vi applikationen i figur 2.

Jämförelse medel och median



<https://www.geogebra.org/m/VSDAv6rv>

Figur 2. GeoGebra-applikation av Jonas Hall

I denna applikation ingår sju olika tal som kan ändras genom att motsvarande punkter (blå) flyttas längs tallinjen. Applikationen är konstruerad så att medianen (grön punkt) och medelvärdet (röd punkt) automatiskt uppdateras. Här kan läraren ställa frågor där elevernas hypoteser kan testas genom att punkter flyttas. Några förslag på frågor är:

- Vad händer med medianen och medelvärdet om vi flyttar ...?
- Vilket är det största värdet ni kan få på medianen genom att flytta en punkt?
- Hur kan punkterna placeras för att medianen ska bli 10 och medelvärdet ska bli så stort som möjligt?
- Hur kan punkterna placeras för att medelvärdet ska bli 20 och medianen ska bli så stor som möjligt?
- Hur kan punkterna placeras för att medelvärdet ska vara ett "missvisande" lägesmått?

Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

I modulernas tredje del är fokus på elevers användning av GeoGebra. Här handlar det om färdigkonstruerade GeoGebra-applikationer med tillhörande text i form av instruktioner och frågor till elever, så kallade dynamiska arbetsblad. Många av de resurser som finns består endast av en GeoGebra-applikation utan instruktioner och/eller frågor till elever och då är det viktigt för lärare att fundera över lämpliga frågor att ställa till dem.

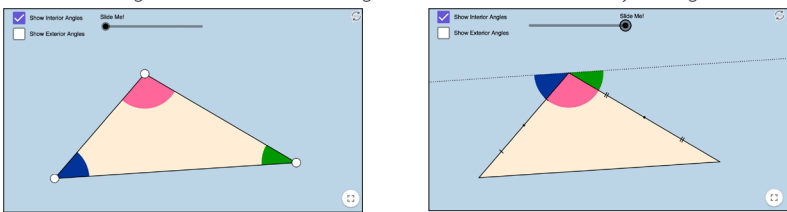
Det finns även färdigkonstruerade dynamiska arbetsblad tillgängliga att använda direkt eller anpassa till den egna klassen. Vid träffen demonstrerades hur ett befintligt arbetsblad på engelska kan översättas och anpassas.

I figur 3 visas det ursprungliga arbetsbladet till vänster. I den högra bilden ser vi resultatet när glidaren har dragits hela vägen till höger.

I figur 4 visas det anpassade arbetsbladet. Här valde vi att korta ned instruktionerna och placera dem i direkt anslutning till frågan. För att poängtera

att eleverna ska dra en generell slutsats, omformulerade vi den första frågan. Vidare valde vi att ta bort alternativet att undersöka yttervinklar genom att ta bort kryssrutorna samt den andra frågan.

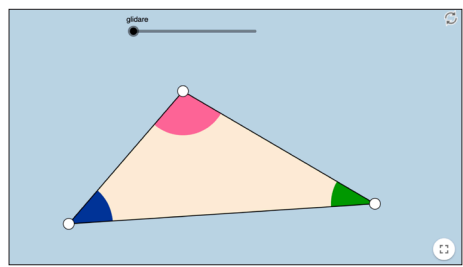
Triangle Angle Theorems
 Interact with the app below for a few minutes.
 Then, answer the questions that follow.
 Be sure to change the location of this triangle's vertices each time *before* you drag the slider!



What is the **sum of the measures of the interior angles** of this triangle? .
 What is the **sum of the measures of the exterior angles** of this triangle?

<https://www.geogebra.org/m/munhXmzx#material/FAhtKpR5>

Figur 3. Dynamiskt arbetsblad i GeoGebra av Tim Brzezinski.



Dra i glidaren!
 Ändra triangeln genom att dra i triangelns hörn och dra därefter i glidaren igen.
 Vilken slutsats kan ni dra om **vinkelsumman i en triangel**?

<https://www.geogebra.org/m/pdqxyxpu>

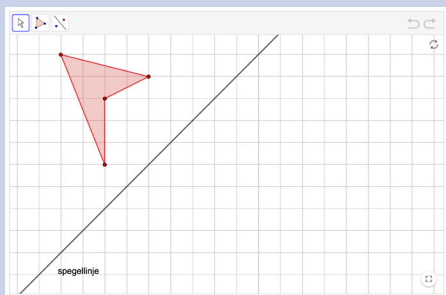
Figur 4. Anpassat arbetsblad

Del 4: Elevaktiviteter med GeoGebra-konstruktioner

Modulens avslutande del handlar om elevaktiviteter där eleverna själva ska skapa de GeoGebra-konstruktioner som behövs. När elever ges möjlighet att skapa sina egna konstruktioner, baserat på instruktioner som kan vara mer eller mindre detaljerade, utvecklar de sina färdigheter med programmet. När eleverna blir bekanta med programmet kan det bli naturligt för dem att spontant använda det i olika situationer.

Ett sätt att underlätta för eleverna att bekanta sig med programmet är att begränsa antalet verktyg i GeoGebra. Exempel på detta kan vi se i många av de resurser som finns att tillgå. Figur 5 visar ett exempel där endast de nödvändiga verktygen är tillgängliga. En fördel med att begränsa antalet verktyg för elever är att detta minimerar risken att de fastnar i tekniska detaljer och att matematiken hamnar i skymundan. På det här viset kan eleverna bekanta sig med några få verktyg åt gången.

Använd polygonverktöget för att konstruera spegelbilden av den röda polygonen. Testa därefter ditt svar genom att använda speglingsverktöget.



<https://www.geogebra.org/m/xtthmxua>

Figur 5. Dynamiskt arbetsblad med ett begränsat antal verktyg.

I samband med att elever ska arbeta med aktiviteter i GeoGebra är det viktigt att fundera över på vilket sätt de ska få tillgång till aktiviteterna samt hur de ska dokumentera sitt arbete. Ett sätt är att de får aktiviteterna utskrivna på papper som de även kan redovisa sina svar på. Ett annat alternativ är att skapa en GeoGebrabok bestående av flera dynamiska arbetsblad. Här finns även möjlighet att skapa en GeoGebralektion (GeoGebra Classroom) där läraren kan överblicka elevernas arbete med aktiviteten via sin egen dator. Detta demonstrerades vid den sista träffen och lärarna fick även prova på att som elever genomföra några uppgifter i en GeoGebralektion.

Möjligheter och utmaningar med GeoGebra

Trots vissa utmaningar var lärarnas erfarenheter övervägande positiva. Som avslutande kursuppgift (för att erhålla kursintyg) ombads deltagande lärare att reflektera kring möjligheter och utmaningar med att använda GeoGebra i undervisningen. Bland annat lyfte flera lärare fram möjligheter som kan leda till ökad förståelse hos elever. Några möjligheter som nämndes var att:

- snabbt rita exakta figurer
- visualisera abstrakta matematiska begrepp och samband
- låta eleverna undersöka matematiska samband
- variera undervisningen för att öka elevernas motivation.

Bland de utmaningar som lärarna nämnde handlade de flesta om:

- behov av tid att lära sig programmet, både för lärare och elever
- behov av ytterligare kompetensutveckling
- distraktionsproblem när elever jobbar vid datorer
- att elever kan ha svårt att se kopplingen mellan det de gör i GeoGebra och mer traditionella uppgifter.

Brunström, M. Fahlgren, M. (2017). *Dynamiska matematikprogram – en outnyttjad resurs*. Nämnaren 2017:2

Skolverket (2022). *Skolverkets uppföljning av digitaliseringsstrategin 2021*.

<https://www.skolverket.se/publikationer?id=9385>

Texter på Lärportalen:

<https://larportalen.skolverket.se/moduler/M478>

<https://larportalen.skolverket.se/moduler/M479>