

Algebra-artisten

I jakten på något mer interaktivt än matematikböcker på skärmen fann en av artikelförfattarna gratisprogrammet Desmos. Här beskriver de båda kollegorna hur elever i årskurs 8 bekantar sig med ekvationer och olikheter samtidigt som de skapar egna konstverk med hjälp av matematiska funktioner.

Att visa räta linjens ekvation $y=kx+m$ och hur de olika ingående parametrarna påverkar hur grafen ser ut, har alltid varit en viktigt del av högstadiets matematikundervisning. Att få förståelse för hur en ändring av parametrarna får linjen att ändras tar tid. Miniräknare kan vara till hjälp, men att snabbt kunna se hur linjen ändras är inte lätt.

År 2014 var en av oss, Cecilia, på NCTM:s årliga konferens i New Orleans. Cecilia var på jakt efter något som var mer interaktivt än matematikböcker som blivit pdf-filer. Hon ville hitta ett program som fokuserar på elevinteraktion, matematisk förståelse, tillämpning, analys, utvärdering och skapande, något där eleverna kunde utnyttja datorn för att pröva och ompröva och dessutom få direkt feedback på det de gjorde. Cecilia ville hitta något som gav ett pedagogiskt mervärde till undervisningen med fokus på förståelse och det matematiska innehållet.

Mellan de olika föreläsningarna gick hon runt bland utställarna i den stora hallen och kom till ett bord med fyra ungdomar och en dator. Där såg hon *Draw a graph of cannon man's height vs time*. En liten man blir skjuten rakt upp ur en kanon, vänder, faller ner och vecklar till sist ut en fallskärm så att han faller långsammare än då han sköts upp. Uppgiften för eleverna var att rita upp hur de trodde att höjd-tid-grafen skulle se ut. Det intressanta med programmet var att eleverna får se sin graf i realtid samt mannens färd enligt grafen i jämförelse med den som datorn visade från början. Eleverna kunde prova att rita sin graf hur många gånger de ville; sudda, ändra, jämföra och förbättra. Ingen musik, inga uppmuntrande ord om att försöka igen, inget "Bra, du gjorde rätt!". Fokus låg på grafen och det matematiska.

Programmet som Cecilia fick se för första gången var Desmos. Det är en gratis, webbaserad, matematisk miljö som möjliggör ett dynamiskt och undersökande arbetssätt i matematik. Desmos behöver inte laddas ner. Det har en lägre användartröskel och är mer intuitivt än Geogebra. Även om Desmos har färre matematiska möjligheter fungerar det mycket bra på högstadiet. Läraren kan skapa egna aktiviteter eller ladda ner dem som redan finns. Det går att införa ändringar i redan existerande uppgifter eller att översätta aktiviteterna. Eleverna kan också själva skapa uppgifter för att dela med sina klasskamrater. Med detta i bagaget och projektet *Algebra-artisten* kom Cecilia tillbaka till Sverige. Nu skulle eleverna få skapa konstverk med hjälp av matematiska funktioner.

Så här arbetar vi

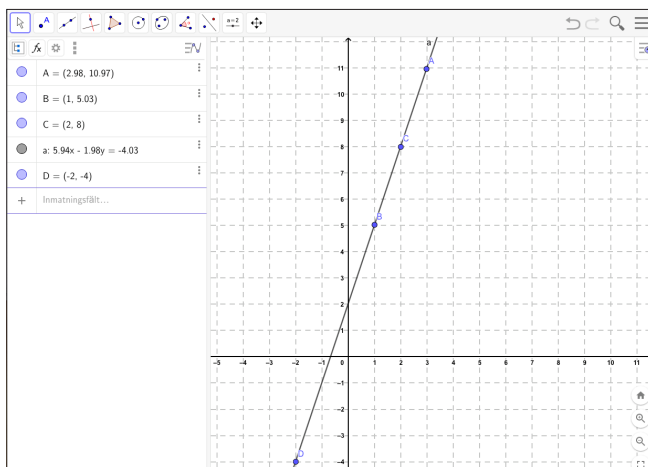
Projektet riktar sig till elever i årskurs 8. De har viss erfarenhet av Geogebra, men inte av räta linjens ekvation.

Lektion 1

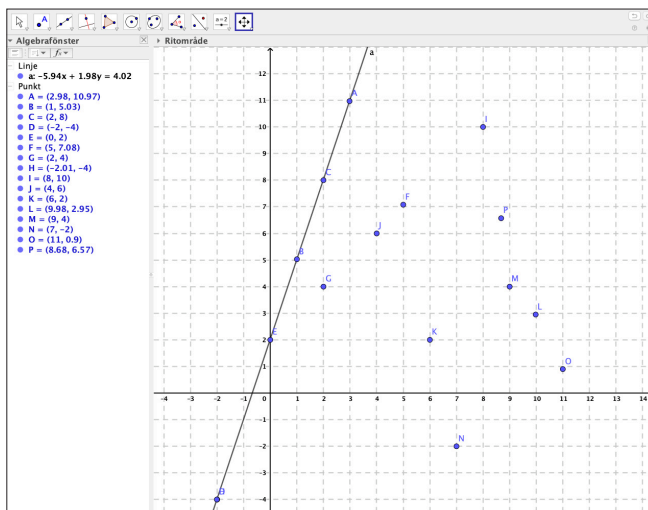
Lektionen börjar med att vi ber eleverna hitta x och y som uppfyller ekvationen $y = 3x + 2$. De punkter som eleverna hittar skriver vi upp på tavlan:

$$(0, 2) \quad (3, 11) \quad (1, 7) \quad (-2, 4)$$

Därefter plottar vi lärare in punkterna i Geogebra. Eleverna upptäcker att samtliga punkter ligger på en linje. Att vi använder Geogebra här är enbart för att vi lärare är mer vana vid det.

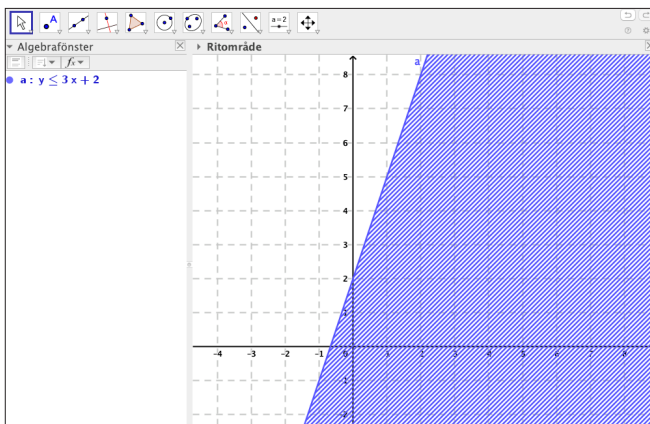


Vi tar ett steg till och frågar eleverna om de kan hitta x och y som uppfyller olikheten $y \leq 3x + 2$. Nu hittar eleverna många fler punkter som vi också plottar.



Punkterna verkar ligga lite överallt, men eleverna försöker ändå hitta ett mönster. De upptäcker att samtliga punkter ligger till höger om den räta linjen $y = 3x + 2$.

När vi skriver in olikheten $y \leq 3x + 2$ i Geogebra ser det ut så här:



Sedan frågar vi vad som händer om olikheten istället är $y \geq 3x + 2$. Eleverna upptäcker då att samtliga punkter hamnar till vänster och ovanför den räta linjen $y = 3x + 2$. På mycket kort tid har eleverna på ett låtsamt sätt kommit i kontakt med mycket matematik och diskussionerna leder till en slutsats om hur ekvationen och de olikheter som de arbetar med kan representeras visuellt. Vi sammanfattar:

- $y = 3x + 2$ punkter *på* linjen
- $y \leq 3x + 2$ punkter *på eller under* linjen
- $y \geq 3x + 2$ punkter *på eller över* linjen
- $y < 3x + 2$ punkter *under* linjen
- $y > 3x + 2$ punkter *över* linjen.

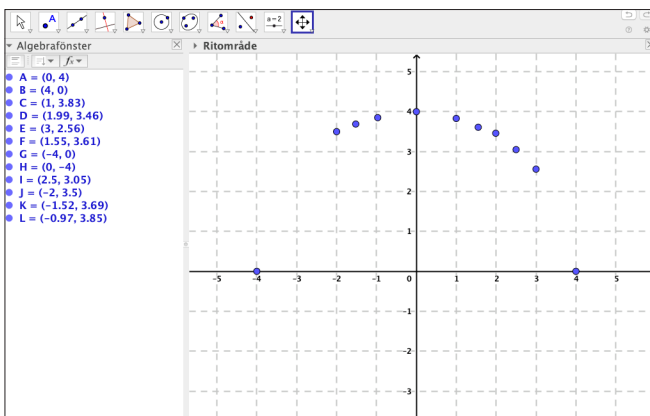
På lektionen går vi vidare och ger eleverna ekvationen $x^2 + y^2 = 16$ med samma uppmaning om att hitta x och y som uppfyller ekvationen. Här är det viktigt att poängtera att eleverna inte vet att detta är ekvationen för en cirkel. På samma sätt som med räta linjens ekvation, börjar eleverna att metodiskt arbeta med att sätta in värden för x och y som gör att ekvationen gäller.

$(0, 4)$ $(4, 0)$ $(-4, 0)$ $(0, -4)$

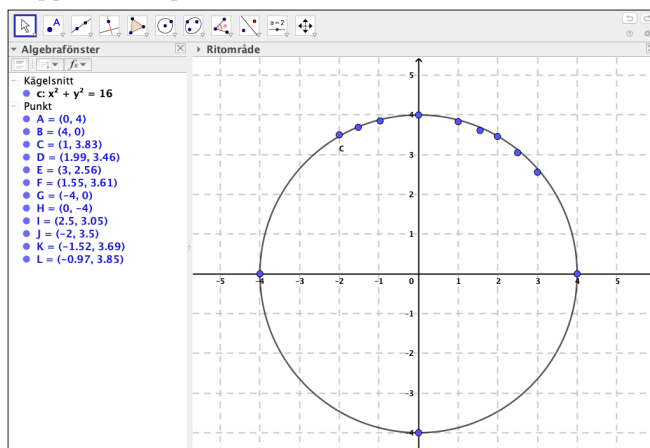
Det finns alltid elever som kommer ihåg kvadratrötter och helt plötsligt öppnar sig en ny värld av punkter som också uppfyller $x^2 + y^2 = 16$:

$(\sqrt{2}, \sqrt{14})$ $(\sqrt{4}, \sqrt{12})$ $(1, \sqrt{15})$ $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$ $(\sqrt{10}, \sqrt{6})$

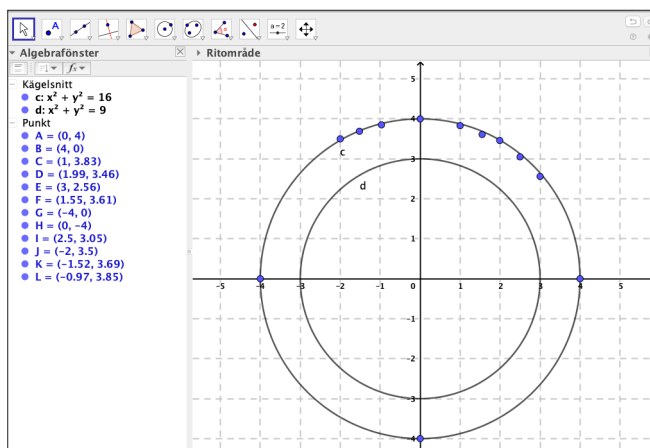
Vi skriver in punkterna i Geogebra.



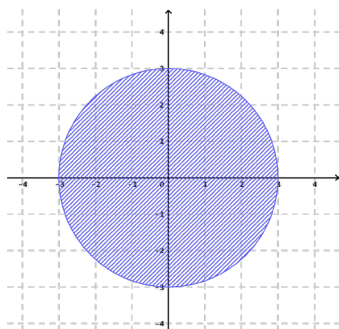
Eleverna upptäcker att punkterna bildar en cirkel.



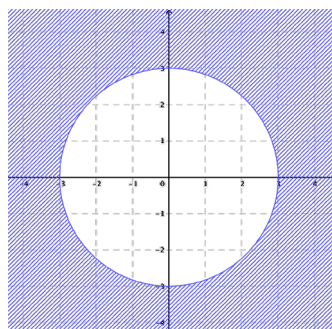
Vi fortsätter med frågan: Vad händer om vi byter ut 16 mot 9 i ekvationen, alltså $x^2 + y^2 = 9$. Vi skriver ekvationen $x^2 + y^2 = 9$ i Geogebra och det blir en mindre cirkel. Några elever inser att $\sqrt{16}$ och $\sqrt{9}$ ger dem cirkelns radie.



Vi avslutar lektionen med att diskutera vad som händer när vi byter ut likhets-tecken mot \leq och \geq . När vi skriver in $x^2 + y^2 \leq 9$ färgas området innanför cirkeln och när vi skriver in $x^2 + y^2 \geq 9$ färgas området utanför.



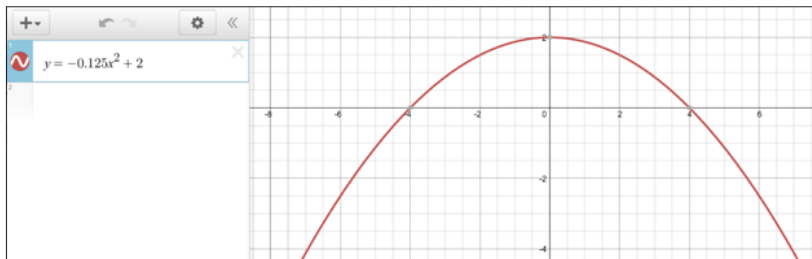
$$x^2 + y^2 \leq 9$$



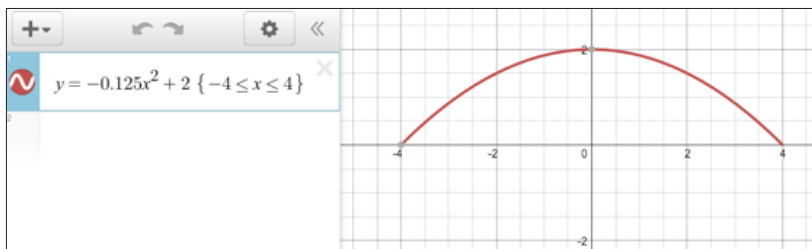
$$x^2 + y^2 \geq 9$$

Lektion 2

Den här lektion börjar vi med en kort repetition av lektion 1. Vi introducerar sedan begreppen *definitionsområde*, t ex $\{-4 \leq x \leq 4\}$, och *värdeområde*, t ex $\{y \geq 5\}$, genom att, nu i Desmos, visa bilden på en parabel som vi begränsar.

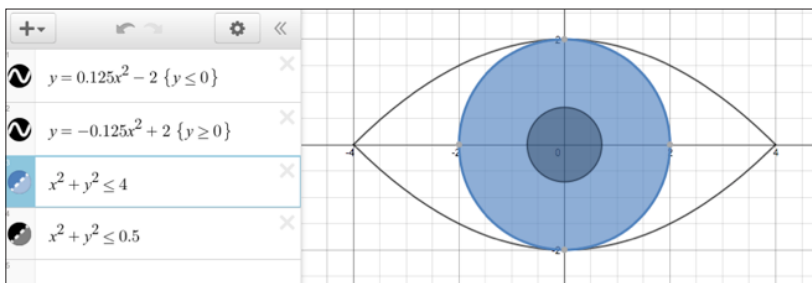


Före begränsningen.



Efter begränsningen: $\{-4 \leq x \leq 4\}$ anger x -värden för vilka funktionen gäller.

Eleverna har inte arbetat med parabler tidigare, men det gör ingenting. Det är själva begränsningen av kurvan vi vill visa. Genom att sedan kombinera definitions- och värdeområde med olikheter, parabler och cirklar kan vi skapa vårt första gemensamma konstverk:



Lektion 3

Vi repeterar genomgångna begrepp och försäkrar oss om att eleverna har förståelse och kunskap om dem. Därefter får eleverna skapa egna konton i Desmos och vi presenterar den individuella uppgift som eleverna ska göra. Vi poängterar att arbetet ska fortgå i några lektioner så att eleverna förstår vikten av att vara inloggade när de arbetar och att allt de gör sparas automatiskt. Det är viktigt att de kan fortsätta där de var föregående lektion. Eleverna får en arbetsbeskrivning att följa, se nästa sida.

Algebrakonstverk med DESMOS

Uppdrag: Använd desmos.com för att skapa ditt eget konstverk med hjälp av algebra.

Din teckning bör:

- innehålla åtminstone 12 grafer
- vara originell, kreativ och konstnärlig
- vara tekniskt mångsidig (en trevlig blandning av olika typer av grafer) olika typer av grafer som du uppmuntras att använda är: linjer, parabler, absolutvärdesgrafer, cirklar, ellipser, kvadratrotsgrafer och enkla polynom – du behöver inte använda alla dessa grafter men det ska vara en blandning
- innehålla begränsningar i värdemängd
- innehålla begränsningar i definitionsmängd
- innehålla olikheter.

Mer att tänka på

- Skapa ditt eget Desmoskonto där du gör och sedan sparar dina ritningar.
- Kom ihåg att spara din teckning innan du avslutar programmet.
- Restriktioner, dvs användning av begränsningar i värdemängd och definitionsmängd, kommer att vara en viktig del i skapandet av din teckning.
- Det ska finnas en balans mellan konstnärliga meriter och teknisk mångfald i valet av dina grafer. Till exempel bör en stor konstnärlig idé inte vara ett hinder för teknisk mångfald och tvärtom. Sträva efter att hitta rätt balans: teknisk mångfald och konstnärlig elegans.

Beskrivning av konstverket (i ett separat Word-dokument)

- Ge ditt konstverk en titel.
- Beskriv teckningen kort.
- Frågor som kan hjälpa dig när du ska beskriva ditt konstverk:
Hur kom du fram till din idé?
Hur använde du olika grafter för att skapa din teckning?
Vad blev anledningen till verkets titel?
Vad lärde du dig under skapandeprocessen?

Försök att ge en äkta, tankeväckande beskrivning.

Ditt Desmos-konstverk *och* Word-dokument med beskrivning ska lämnas in via e-post senast tisdag 10 april.

För att göra arbetet mer vetenskapligt och systematiskt, måste eleverna parallellt skriva en rapport som ska lämnas in med länken till deras konstverk i Desmos. För att underlätta rapportskrivandet har vi skapat en enkel dagboksmall som eleverna använder i slutet av varje lektion.

Lektion 4–6

Eleverna arbetar individuellt med sina konstverk i Desmos. I slutet av varje lektion skriver eleverna i dagboksmallen. Läxor under dessa dagar är att arbeta med konstverket.

Våra lärdomar

Målet med projektet är att eleverna ska upptäcka matematik som är kopplad till funktioner och deras grafer. Eleverna får använda egna funktioner och även experimentera med de som Desmos erbjuder: "Finns det några funktioner som uppfyller mina behov?" Eleverna får en snabb förståelse för hur parametrar påverkar olika grafers utseende. Vissa elever som tex vill ha "bra kurvor" upptäcker att trigonometri med sinus och cosinus erbjuder det. Trigonometri väcker elevernas nyfikenhet och de vill veta mer, vilket de får i slutet av årskurs 9.

Tillsammans med sitt konstverk och rapporten, ska eleven sista lektionen spela in en kort video på 3–4 min. Videon ska beskriva konstverket. Vi utmanar eleverna att använda korrekt matematisk terminologi i videon och orden definitions- och värdemängd ska ingå. Eleverna gör även en kamratbedömning av varandras konstverk. Vi bedömer om eleverna har inlärd kunskap bland annat genom att de får para ihop rätt ekvation eller olikhet med tillhörande del på konstverket.

Konstverken som eleverna lämnar in, tillsammans med rapporten och filmen, visar att eleverna mer än gärna kan rita 60 ekvationer och ännu fler för att få fram sina konstverk. Detta är näst intill en omöjlighet om de ska göra det med papper och penna.

Vår erfarenhet är att genom att arbeta digitalt med avstamp i räta linjens ekvation, lyckas eleverna vara kreativa med hjälp av det matematiska språket och de möter olika avancerade funktioner som väcker deras nyfikenhet och en önskan att lära sig mer.

Desmos räcker bortom skapandet av konstverk med grafer. Plattformen innehåller även färdiga klassrumsaktiviteter: Polygraph, Marbleslides, Water Line, Function Carnival, Title Pile, Penny Circle, Central Park, Match my ...

Kännetecknande för samtliga aktiviteter är interaktivitet, användarvänlighet, uppmuntran till undersökande arbetssätt samt träning av kommunikation-, resonemang-, problemlösnings- och begreppsförmåga. I ett annat nummer berättar vi mera om Desmos klassrumsaktiviteter. På nästa sida visas ett exempel på en elevredovisning:

Min algebra-teckning

Dokumentation av mitt DESMOS-arbete:

tisdag 3 april

läxa till onsdag 4 april

onsdag 4 april

läxa till torsdag 5 april

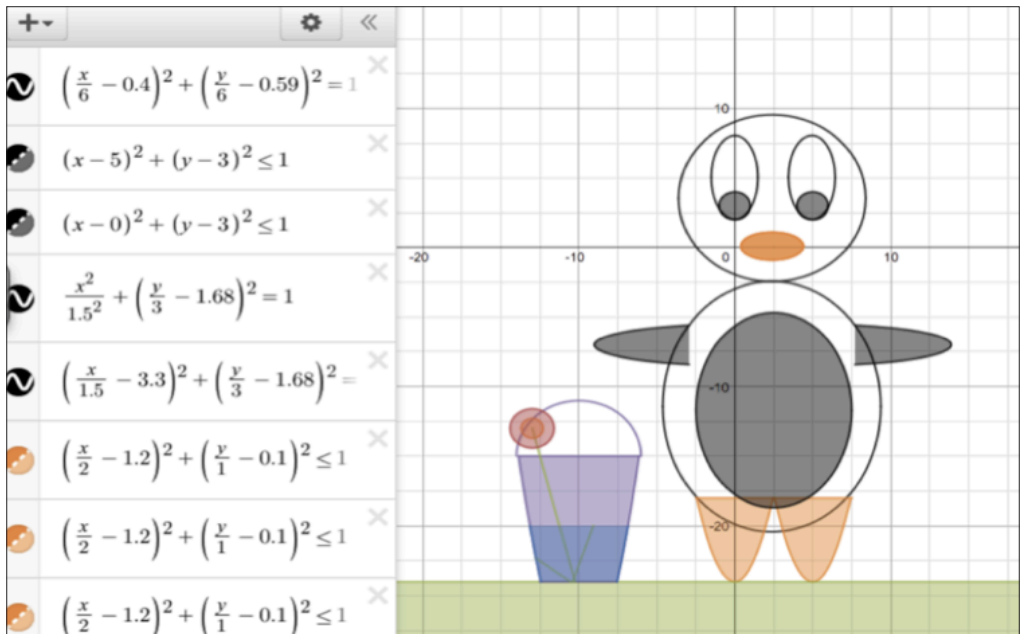
torsdag 5 april

läxa till tisdag 10 april

tisdag 10 april

Kontrollera med checklistan att allt som ska vara med är med.
Konstverket lämnas in senast tisdag 10 april.

Dagboksmall



Pingvinen i parken

”Från början visste jag inte riktigt vad jag ville göra. På andra lektionen kom jag på att man kan göra en hund. Efter att jag börjat med ögonen kände jag att det såg mer ut som en pingvin än en hund, så jag ändrade mig och började göra en pingvin. Jag lade sedan till en hink med en blomma i och lite gräs.

Jag använde cirklar och ellipser till huvudet och till kroppen använde jag ellipser. När jag gjorde fötterna använde jag en parabel som jag begränsade värdemängden på. Till händerna använde jag också parabler, men jag begränsade definitionsmängden. Jag använde både likheter och olikheter i min figur.

Till gräset använde jag en rät linje och en olikhet. Till hinken och vattnet använde jag parabler som jag begränsade värdemängden på och använde olikheter. Till blomman använde jag räta linjer och räta linjens ekvation och cirklar som var olikheter.

Anledningen till verkets titel var att jag gjorde en pingvin som senare hamnade i en park.

Jag lärde mig hur man ska använda begränsningar i både definitionsmängd och värdemängd för att ge bilden ett annat uttryck. Jag lärde mig också hur man flyttar olika saker i graferna och att förstå formler samt påverka dem så att man får vad man vill.”

Se hela följderna av ekvationer och olikheter:

www.desmos.com/calculator/fqctwiqvt

Artikeln publicerades ursprungligen i Nämnaren 2019:4.