Christoph Kirfel

Det magiska korttricket

Den här artikeln inleds med en berättelse om när den stora magikern genomför ett trolleritrick. Därefter avslöjas tricket och författaren för ett induktivt resonemang för att bevisa ett känt talteoretiskt påstående som kallas Proizvolovs identitet.

Kära publik!

I kväll får ni få lära känna mina förmågor att se in i framtiden, att förutsäga ett händelseförlopp. Jag behöver två frivilliga här i salen som erbjuder sig att delta i demonstrationen. Det är helt ofarligt, ingen kommer till skada. Min uppgift är att förutsäga vad de två testpersonerna ska göra. Ah, tack Frode och Jorunn. Så här har vi två frivilliga.

Ni ser här att jag har en helt vanlig kortlek, eller snarare en del av en kortlek, alla kort från 1 till 10, om vi säger att ess motsvarar talet 1. Jorunn, du får gärna kontrollera att allt är korrekt. På denna lilla papperslapp ska jag nu skriva ett tal som senare kommer att dyka upp. Talet på lappen kommer att avslöja att jag kan se in i framtiden och förutsäga vad mina två frivilliga här kommer att göra.

Nu får du blanda denna lilla kortlek så gott du kan, Frode, och jag, kvällens stora magiker, delar ut hälften av korten till var och en av er. Varje person får alltså fem kort, helt slumpmässiga kort. Fem kort vardera. Jag sätter på mig en ögonbindel och kan inte se vad de båda gör.

Jag kommer nu att be den av er som fick 10-kortet att sortera sin hand i fallande ordning medan den andre sortera sin hand i stigande ordning. Publiken får gärna kontrollera att Jorunn och Frode gör rätt. Jag kan inte se något.

Ni ska nu räkna ut differenserna mellan motsvarande kort, det vill säga differensen mellan Jorunns första kort och Frodes första kort, sedan differensen mellan Jorunns andra kort och Frodes andra kort och så vidare. Sedan ska alla dessa differenser läggas ihop. Det tar lite tid.

Och vad blir svaret, Jorunn?

Jorunn: Summan av alla differenser är 25.

Det säger du inte? Låt oss titta på lappen. Vad visste jag innan du blandade korten och jag delade ut dem helt slumpmässigt? Se där, på lappen står det 25. Ännu ett bevis på min oöverträffade förmåga att se in i framtidens dolda hemligheter.

Skojare eller äkta siare?

Låt oss undersöka korttricket som magikern presenterade. Han delar ut korten 1–10 till två händer, helt slumpmässigt. Sedan sorteras den ena handen (den som innehåller talet 10) i fallande ordning och den andra i stigande ordning. Det kan till exempel se ut så här:

Jorunns hand	Frodes hand
10	1
7	4
6	5
3	8
2	9

Vi beräknar nu differenserna mellan talen och adderar dessa, det vill säga

$$(10-1)+(7-4)+(6-5)+(8-3)+(9-2) = 9+3+1+5+7 = 25$$

Talet 25 är det tal som stod på lappen, vilket publiken givetvis häpnade över. Mystiskt? Nej inte alls. Summan av differenserna – och då tänker vi på de absoluta värdena på differenserna där vi subtraherar det minsta från det största talet – kommer alltid att vara 25 oavsett vilka kort som tilldelats vilken hand.

Ett generellt samband

Vi ska nu att träda in i rollen som matematiker och ställa frågan: ”Finns det ett generellt samband här?”. Vi formulerar problemet i en något mer generell version där vi utgår från ett jämnt antal på varandra följande tal. Vi är bara intresserade av situationer med ett jämnt antal kort eftersom antalet ska kunna delas lika på två händer.

Talen 1, 2, 3 ... $(2n-1)$, $2n$ är uppdelade i två lika stora mängder. Den mängd som innehåller det största talet $(2n)$ är ordnad i fallande ordning så att $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Den andra mängden är ordnad i stigande ordning så att $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Då är summan av differenserna (utan tecken) lika med:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2$$

Vår hypotes är således att summan av differenserna alltid är lika med kvadraten på halva antalet kort.

Vi undersöker hypotesen

Två typer av situationer kan uppstå som är ganska olika. Det minsta och största talet (1 och $2n$) kan hamna på olika händer eller på samma hand.

1. Har de hamnat på samma hand ser situationen ut så här:

Hand A:	$2n \ldots (a-1) \ldots 2, 1$
Hand B:	$a \ldots$

Eftersom 1 och $2n$ är på hand A, kommer det lägsta kortet på hand B att vara ett annat tal än 1. Vi kallar detta kort för a. Då kommer alla kort lägre än a att samlas på hand A tillsammans med ett. Hand B har då inga kort lägre än a. Här föreslår vi ett kortbyte, där hand A får a i utbyte mot 1. Detta ger följande situation

Hand A:	$2n \ldots a, (a-1) \ldots 2$
Hand B:	$1 \ldots$

Förändringen i den första differensen är $a-1$, eftersom $2n-a$ ersätts med $2n-1$. För var och en av de $(a-1)$ sista differenserna är förändringen 1. Totalt sker alltså ingen förändring i differenssumman. Därför kan vi alltid anta att de högsta och lägsta korten är i olika händer.

2. Har de hamnat på olika händer ser situationen ut så här:

Hand A:	$2n \ldots$
Hand B:	$1 \ldots$

Vi föreställer oss nu att vi tar talen $2n$ och 1 ur spel. Då återstår talen från 2 till $2n-1$. Vi minskar samtliga dessa tal med ett och får talföljden 1 till $2n-2$. Eftersom vi har minskat alla tal på både hand A och hand B med samma tal (nämligen med 1), kommer de enskilda differenserna mellan de återstående korten att vara oförändrade.

De återstående korten med talen från 1 till $2n-2$ kan tänkas komma från ett situation med två färre kort än den vi utgick från. Om nu vår hypotes, nämligen att differenssumman är lika med kvadraten på halva antalet kort, stämmer för denna reducerade kortlek, det vill säga att summan av differenserna för en kortlek med kort från 1 till $2n-2$ är $(n-1)^2$, då kommer summan av differenserna för hela kortleken från 1 till $2n$ att vara:

$$D = (n-1)^2 + (2n-1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$$

eftersom $(2n-1)$ är differensen mellan de två kort vi tog bort från spelet. Kort sagt: Om vår hypotes gäller för $(2n-2)$ kort så gäller den även för $2n$ kort.

Nu tittar vi på *minsta möjliga kortlek* som endast består av två kort med talen 1 och 2. Här är $n=1$ och differensen är $1=1^2$, som önskat. Således kan vi dra slutsatsen att vår hypotes är korrekt även för en kortlek med fyra kort. Vi undersöker hela tankegången för fyra kort. Först kontrollerar vi om 4 och 1 är i olika händer, annars gör vi ett kortbyte. När vi vet att 4 och 1 är i olika händer tar vi bort dem från spelet och står kvar med talen 2 och 3. Dessa reduceras till 1 och 2 utan att differensen ändras (både minuend och subtrahend reduceras med ett). Spelsituationen med talen 1 och 2 är redan bekant, där är differensen 1. Lägger vi till differensen mellan de borttagna korten $(4-1=3)$ får vi $3+1=4=2^2$, som önskat.

Vilken fördelning som helst av korten 1 till $2n$ på två händer kan med hjälp av vårt växlingstrick reduceras till en motsvarande fördelning av korten 1 till $2n-2$, där vi kan anta att hypotesen redan har visats. Vi kan därmed dra slutsatsen att hypotesen måste gälla alla kortlekar där antalet kort är ett jämnt tal (1 till $2n$).

Den typ av argument som vi använt här kallas för induktion och förekommer på många ställen inom matematiken, särskilt när det gäller att bevisa påståenden om naturliga tal.

Mer att fundera över

1. Vi ser följande mönster:

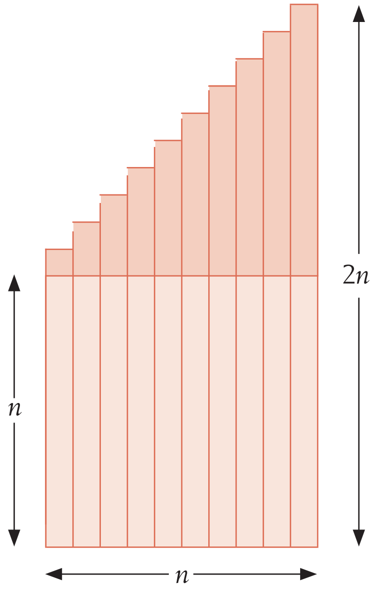
$$\begin{gathered}1=1^2\\1+3=2^2\\1+3+5=3^2\\\dots\\1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2\end{gathered}$$

Påstående: Om du lägger ihop de första n udda talen får du n^2.
Kan ett sådant påstående visas med hjälp av korttricket?

2. Vi skriver om summan av differenserna från vårt allra första exempel på följande sätt:

$$(10-1)+(7-4)+(6-5)+(8-3)+(9-2)=10+7+6+8+9-1-4-5-3-2$$

Då ser vi att de fem största talen uppträder positivt medan de fem minsta talen uppträder negativt. Kommer det alltid att vara så här och kan detta möjligen hjälpa oss att visa korttricksresultatet på ett nytt sätt?



Kanske kan den här illustrationen hjälpa oss att inse att vi alltid får kvadrattalet n^2 som svar.

Korttricket eller den underliggande ekvationen kallas ”Proizvolovs identitet” och har varit känd för matematiker under lång tid. Själv fick jag se tricket för första gången hos lektorstudenten Ruben Schelbred Thormodsæter.