Lasse Berglund

Derivatans graf – elevens tankesprång

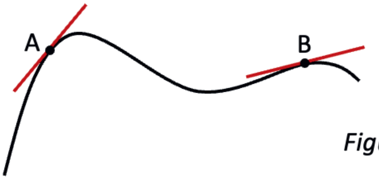
Geogebra är ett kraftfullt verktyg som kan användas för att skissa derivatans graf. Eleverna får hjälp att förstå och inte bara göra något schablonmässigt då abstraktionsnivån stiger.

Det fungerar ofta bra då man i sin undervisning nöjer sig med så enkla hjälpmedel som några whiteboardpennor. Inget skymmer sikten och ett samtal kan uppstå runt en skriven formulering. Men trots detta kan man i vissa kursmoment utnyttja något digitalt hjälpmedel om det görs med eftertanke.

Det dynamiska programmet Geogebra är ett kraftfullare verktyg än den grafritande räknaren. Om Geogebra ska användas är det därför lämpligt att utnyttja denna dynamik. Inte bara att schablonmässigt lära eleverna hur man matar in $f(x)$ i ett av fälten och på raden under matar in $f'(x)$. Att få en poäng på det nationella provet för den insatsen är inget som gynnar framtida generationer.

Från tangent till derivata

Att en tangent dragen i en punkt på en graf utgör ett mått på grafens lutning i den punkten är sällan något problem för elever. De ser också att lutningen är större i punkt A än i punkt B; se figur 1. Allt är handfast och konkret.



Figur 1

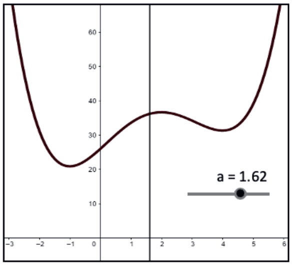
Längre fram i studierna stöter de på det så kallade teckenschemat som med sina plus- och minustecken hjälper till att reda ut var den aktuella funktionen växer respektive avtar. Inte heller detta vållar några bekymmer, även om många tar in resonemanget rent mekaniskt. Man klarar av att rita grafen. Men steget därefter, att skissa derivatans graf, är stort för många elever. Abstraktionsnivån stiger och ett tankesprång ska till. Innan vi går vidare i detta följer här några tekniska rader rörande Geogebra.

Glidare och spår

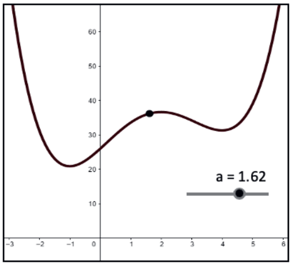
Vi ska här analysera derivatan till en fjärdegradsfunktion och skriver därför in

$$f(x) = x^4/4 - 5x^3/3 + x^2 + 8x + 26$$

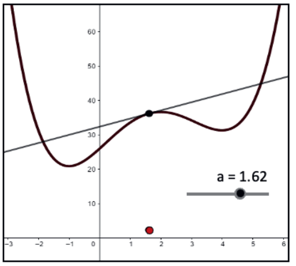
Därefter skapar vi en glidare *a* med steglängden 0,01; se figur 2 med $f(x)$ och glidaren. I inmatningsfältet skriver vi in $x = a$ vilket ger oss en vertikal linje; se återigen figur 2.



Figur 2



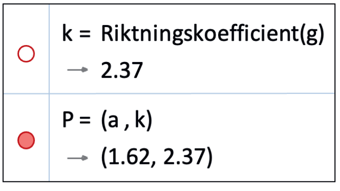
Figur 3



Figur 4

Från en av menyerna i Geogebra väljer vi:

- *Punkt* och klickar en gång i skärningen mellan grafen och den vertikala linjen. Den vertikala linjen behövs inte mer, så med en högerklick tar vi bort bocken för *Visa objekt*. Se figur 3 där en punkt nu följer utmed grafen när vi drar i glidare *a*.
- *Tangent* och klickar på vår punkt och sen en gång någonstans på grafen. En tangent visar sig; se figur 4.
- *Lutning* och klickar en gång på tangenten. En $\Delta y/\Delta x$-triangel visar sig men den intresserar oss inte. Det vi behöver är det som har dykt upp i inmatningsfältet: k = Riktningskoefficient. Vi döljer därför både tangenten och triangeln. Istället skapar vi nu en punkt P sådan att den för varje givet x-värde har kurvans lutning som y-värde. Denna sista mening tål att läsas en gång till. Vi skriver därför in P = (a,k) i inmatningsfältet; se figur 5 och den röda punkten i figur 4. Med denna punkt med sin speciella y-koordinat har eleven nu en grund för en bättre förståelse för derivatans mest elementära definition: $f'(a) = k$.



Figur 5

När vi nu drar i glidare *a* ser vi förutom vår rörliga punkt på grafen också en annan punkt, den röda, som far omkring på skärmen. För att uppfatta dess framfart bättre, högerklickar vi på den och väljer *Visa spår*.

Vad innebär tecknen i schemat?

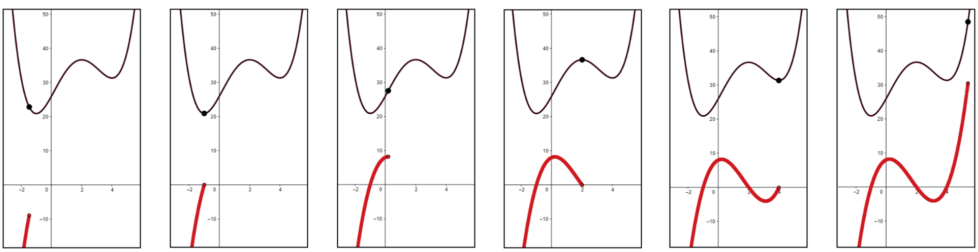
Efter att ha löst ekvationen $f'(x) = 0$ ska ett teckenschema studeras:

x		-1		2		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

Våra elever vet att då derivatan är negativ, som i exempelvis intervallet $2 < x < 4$, se schemat, är funktion $f(x)$ avtagande där. Mer svävande blir svaren om man frågar var derivatans graf befinner sig i samma intervall. Insikten som krävs, är att om derivatan är negativ så befinner den sig *under* x-axeln, där den dessutom kan vara både avtagande och växande vilket den också är i detta fall. Låt oss starta Geogebra och utnyttja det som vi precis har skapat.

Med små steg framåt för att se något stort

Vi för glidare a till sitt vänstra läge för att sen börja dra den åt höger. Samtidigt som den svarta punkten a kommer nedglidande utmed kurvan, se figur 6, kommer nu en kavalkad av röda punkter nerifrån, som hela tiden är i fas med punkten a i x-led och som bildar en ny kurva. Det är derivatans graf som växer fram inför elevernas ögon. Den närmar sig sitt första nollställe och kommer att vara framme exakt då punkten a når sin minpunkt; se figur 6 och figur 7.



6 7 8 9 10 11

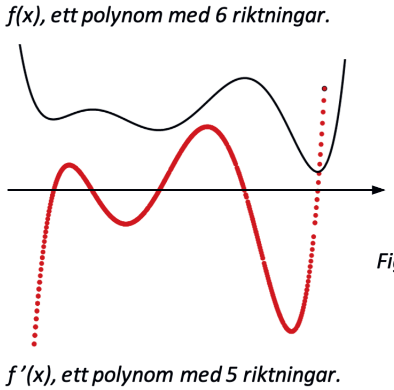
- I figur 8 är derivatan på väg att göra en gir, det vill säga den befinner sig just nu på en egen max-punkt. Detta stämmer också med kurvan däruppe, för just för detta x-värde, i den så kallade inflektionspunkten, är lutningen i detta intervall maximal.
- I figur 9 fortsätter derivatan att visa en funktion som växer. Detta är många gånger svårt för elever att ta in. ”Den röda kurvan går ju neråt.” Ja, derivatan går neråt eftersom lutningen har börjat avta. Men kurvan däruppe är fortfarande växande i detta intervall.
- I figur 10 når derivatan sitt tredje nollställe från den negativa sidan samtidigt som den svarta punkten anländer från ett intervall där alla tangenter har ett negativt värde på k.
- I figur 11 slutligen ser eleverna att teckenschemat ovan är fullbordat.

I denna studie finns många möjligheter till fruktbara diskussioner i klassen var gång man stannar upp i processen, vilket man med detta dynamiska upplägg kan göra precis när man tycker att det passar. För att sen bli av med spåret trycker man CTRL F både på en PC och på en Mac.

"Det minskar med ett"

Våra elever kan derivera: "Talet där uppe trillar ner och sen minskar det med ett". Så är det så klart men för många blir förfarandet inte mer än något de rabblar.

En förstagradare gör inga svängar, det vill säga den har bara en riktning. En andragradare har två riktningar. En n-te gradare kan ha n stycken riktningar. I figur 12 är den svarta kurvan en sjättegradsfunktion. Vi ser också att den har sina maximala sex riktningar. Med samma hantering som ovan kan en elev nu i lugn och ro sitta med sin glidare, se hur derivatan till denna sjättegradare växer fram och konstatera att den har fem riktningar. Denna minskning med ett är för eleven inte längre något som bara är, utan mantrat *derivatan av en sjättegradare är en femtegradare* har förhoppningsvis fått lite kött på benen.



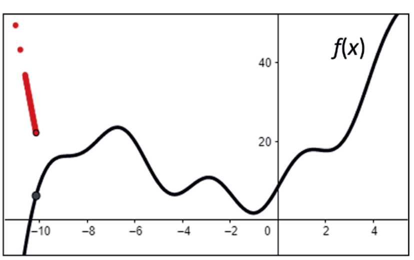
Figur 12

Vi observerar dock att resonemanget om riktningar gäller fullt ut först då n-te-gradaren verkligen har n stycken riktningar.

Den som glider får se

Vi matar nu in funktionen $f(x) = 4{,}4\sin 1{,}7x - 0{,}5e^{-0{,}5x} + x^2 + 3x + 9$ och får grafen i figur 13.

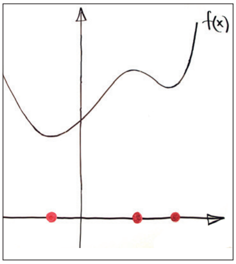
Är det en terrasspunkt vi har där borta till vänster? Det är inte helt lätt att avgöra, och ekvationen $f'(x) = 0$ saknar dessutom analytiska lösningar. Så är det en terrass? Den som glider får se.



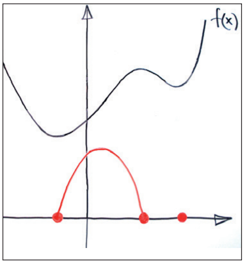
Figur 13

Brasklapp

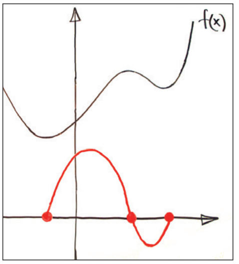
Det går naturligtvis bra att göra denna analys med enklare hjälpmedel. Det räcker med ett par pennor och tavlan i klassrummet; se nedan.



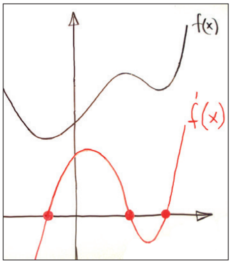
Vi placerar först ut derivatans nollställen.



Då derivatan ska vara positiv i detta intervall och samtidigt passera dessa två punkter, måste den se ut ungefär så här.



Då derivatan ska vara negativ i detta intervall och samtidigt passera dessa två punkter, måste den se ut ungefär så här.



Till vänster ska derivatan vara under x-axeln, till höger ska den vara över.

Även med denna framställning ser eleverna att då funktionen har fyra riktningar, får derivatan tre riktningar.

Några tillägg

- Ett alternativ till att dra i glidaren är att man trycker på högertangenten på tangentbordet. Metoderna kompletterar varandra.
- Man kan med fördel lägga in ett överflöd av glidare och sen i inmatningsfältet till exempel skriva in:

  $$f(x) = \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E} + \mathrm{F}\sin(jx) + \mathrm{G}e^{qx}$$

  Med lämpliga värden på glidarna kan man nu få den fjärdegradskurva som vi här har studerat, eller ännu hellre, helt egna kurvor.