Egbert Langeveld & Andréas Rosenberg

Att tolka derivator med hjälp av enheter

Författarna har i ett ULF-projekt utformat ett arbetsmaterial för elever som läser gymnasiets kurser Matematik 3b och 3c. Elever som kan derivera mekaniskt kan genom att undersöka aktuella enheter få bättre förståelse för hur de ska tolka derivator i ett sammanhang.

Att tolka derivator eller integraler i ett sammanhang är inte det lättaste för elever utifrån deras erfarenheter av undervisning i gymnasiets matematik kurs 3 och 4. Inte heller att veta *ifall* de ska derivera, integrera eller ingetdera när de ska räkna ut något. Inte ens för den elev som är väl förtrogen med den rent mekaniska deriveringen eller integreringen är detta helt lätt. Att derivera, sätta derivatan till noll, derivera igen och undersöka andraderivatans tecken är viktiga steg inom differentialkalkylen vid lösning av optimeringsproblem. När det gäller att tolka derivator och integraler ser vi ett utvecklingsområde inom differential- och integralkalkyl. Därför har vi i ett ULF-projekt (undervisning, lärande, forskning) om proportionalitet, i samarbete med Malmö universitet, utformat ett arbetsmaterial i vilket enhetsresonemang och -analys kan visa på en väg framåt. Arbetsmaterialet är knutet till gymnasieskolans kurs Matematik 3c på natur- och teknikprogrammen samt Matematik 3b på samhällsprogrammet och behandlar tolkning av derivator. Detta arbetsmaterial tycks vara ett bra sätt att främja elevernas lärande inom detta område.

Att elever på programmen NA, TE och SA kan hantera matematiska begrepp, metoder och modeller, samt kan tillämpa och formulera dessa i olika situationer, ingår i exempelvis dessa två punkter i ämnesplanerna 3b/c i gymnasiets matematik.

- Problemlösning som omfattar begrepp och metoder i kursen, med särskild utgångspunkt i karaktärsämnen och samhällsliv.
- Tillämpning och formulering av matematiska modeller i realistiska situationer. Utvärdering av matematiska modellers egenskaper och begränsningar.

Uppgifterna i figur 1 och 2 visar att även på nationella prov är tolkning av derivator viktiga:

Det radioaktiva ämnet polonium-210 sönderfaller till bly-206. Vid sönderfallet bildas även helium-4. I ett visst preparat kan massan som finns kvar av polonium-210 beskrivas med sambandet $m(t) = 2000\,e^{-0,005t}$ där m är massan av polonium-210 i µg och t är tiden i dygn räknat från mätningens början.

Vilket av alternativen A-H nedan anger förändringshastigheten för massan polonium-210 vid tiden 1000 dygn?

A. $-2000\,e^{-5}$ µg

B. $-2000\,e^{-5}$ µg/dygn

C. $2000\,e^{-5}$ µg

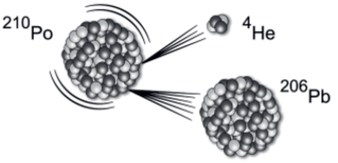
D. $2000\,e^{-5}$ µg/dygn

E. $-10\,e^{-5}$ µg

F. $-10\,e^{-5}$ µg/dygn

G. $10\,e^{-5}$ µg

H. $10\,e^{-5}$ µg/dygn ____________________ (0/1/0)



Figur 1. Offentliggjord nationellt prov-uppgift. Matematik 3c 2014 Del B.

Funktionen f beskriver hur en växande vattenmelons vikt y beror av tiden t, det vill säga $y = f(t)$. Vikten y anges i hg (hektogram) och tiden t i veckor.

Vad får du veta genom att bestämma $f'(3)$?
Välj ett av alternativen A-E. ____________________ (0/1/0)

A. Den vikt i hg som vattenmelonen har vid tiden 3 veckor.

B. Vattenmelonens viktökning i hg under 3 veckor.

C. Vattenmelonens genomsnittliga viktökning i hg/vecka under 3 veckor.

D. Den tid det tar för vattenmelonens vikt att öka till 3 hg.

E. Vattenmelonens viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.

Figur 2. Offentliggjord nationellt prov-uppgift. Matematik 3c 2013 Del B.

Uppgiften i figur 1 förutsätter såväl kunskaper i deriveringsteknik som enhetshantering. I uppgiften i figur 2 ser vi ett ännu renare exempel på vikten av enhetshantering inom differentialkalkyl. I denna uppgift saknas funktionsuttryck. Att behärska den mekaniska deriveringen är inte tillräckligt och heller inte det som bedöms i uppgiften. Här är det tydligt att eleven behöver kunna associera en statisk/dynamisk situation med tillhörande enhet.

Ambitionen med vår undersökning har varit att identifiera undervisningsåtgärder som i första hand angriper den tredje punkten av följande:

1. Hur löser elever uppgifter?
2. Hur *vill* vi att elever ska lösa uppgifter?
3. Hur *bör* vi utföra undervisningen så att eleverna får bättre förståelse och måluppfyllelse inom området *tolkning av derivator*?

Studien är kvalitativ samt mycket liten, varigenom generaliserbarheten är låg.

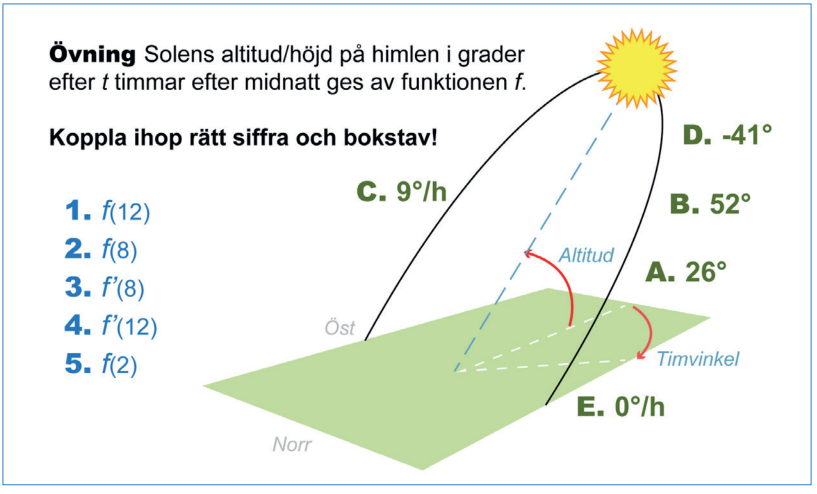
Sammansatt enhet

I Nämnaren 2018:1 återger Ahl och Helenius den gängse definitionen av sammansatt enhet:

> En sammansatt enhet [eng rate] är ett förhållande där två enheter som mäter olika kvantiteter kombineras till en ny enhet som exempelvis hastighet, kilopris och densitet.

Solens altitud (höjd) på himlen

Följande övning genomfördes i en blandad NA/TE-grupp med cirka tio elever strax efter att derivator hade introducerats. Syftet var att tydliggöra skillnaden mellan symbolerna f och f' i ett sammanhang. Eleverna har tidigare i kapitlet kommit i kontakt med förändringshastigheter på olika sätt. Eleverna fick varsin stencil som de arbetade med samtidigt. Rätt siffra och bokstav parades samman i en tabell, vilket eleverna lyckades relativt väl med. Under avslutande diskussion uttryckte eleverna att de insåg att enheterna ° respektive °/h gav en nyckel till vad symbolerna f respektive f' representerar.



Figur 3. Solens altitud/höjd på himlen i grader.

För att dra skillnaden mellan *f* och *f'* till sin spets läts argumenten åtta respektive tolv timmar vara parvis lika. För att kunna para ihop rätt siffra med rätt bokstav krävdes att eleverna hade kunskaper om hur solen rör sig över himlavalvet för att kunna göra en rimlighetsbedömning. För att leda in eleverna i uppgiften gav läraren inledningsvis input av typen [pekande med handen]: *Solen går upp i öster och då är altituden noll grader. Sedan rör sig solen uppåt och når toppen kring lunch för att senare gå ned i väster.*

Skillnaden mellan *f(x)* och *f'(x)* i en kontext

Följande övning genomfördes ett par veckor senare i samma blandade NA/TE-grupp som gjorde *Solens altitud/höjd på himlen*. En tid senare genomförde läraren samma övning med en SA-grupp med tre elever. Eleverna fick först en gemensam uppvärmningsövning som kretsade kring ett rörelseproblem hämtat från mekaniken. Övningen inbegrep en uträkning utifrån ett funktionsuttryck, figur 4 deluppgift *a*, samt en derivering utifrån deriveringsreglerna i deluppgift *c*. I deluppgifterna *b* och *d* skulle även en tolkning göras. *Glöm inte enhet!* påtalades särskilt för eleverna. För att ytterligare tydliggöra skillnaden mellan *f* och *f'* sattes argumenten lika (2,7 *s*). Eftersom de var lika var argumenten som sådana ointressanta. Stenen hade alltså två olika slags egenskaper vid samma tidpunkt – höjd och fart.

Vi försummar luftmotståndet!

Ex En sten faller från en hög höjd.
Stenens höjd i *m* ges av funktionen $h(t) = 48 - 4{,}9\,t^2$ där *t* är tiden i *s*.

a) Bestäm $h(2{,}7)$

b) *Tolka* ditt svar i *a)*

c) Bestäm $h'(2{,}7)$

d) *Tolka* ditt svar i *c)*

Glöm inte enhet!

Figur 4. Skillnaden mellan f(x) och f'(x) i en kontext, gemensam övning på tavlan.

Eleverna fick sedan varsitt häfte med fem olika problem. Problemen löstes i par eller individuellt under cirka tio minuter. Eleverna skulle precis som i solhöjdsövningen para ihop blått och grönt, figur 5. Avsiktligen erbjöds eleverna denna gång inte någon ledning som *Kolla på enheterna*. I enstaka fall krävdes uppgiftsförtydligande. Eleverna uppmanades att skriva kommentarer samt att bedöma svårighetsgraden. De fick sedan lämna in anonymt och deras kommentarer var generellt sparsmakade i stil med *Jag tittade på enheten*. Uppgiften hade designats med en progressiv svårighetsgrad, där nya klurigheter lyftes in uppgift för uppgift. I samband med att eleverna gjorde övningarna fyllde de även i en enkät där de bedömde övningens svårighetsgrad på en skala i fem nivåer från låg till hög, samt gavs utrymme för egna kommentarer i fritext, figur 5. Detta gjorde vi för att ge eleverna möjlighet att själva identifiera eventuella svårigheter.

1. Mängden nederbörd som fallit ges av $f(t)$ där t är tiden i h efter kl. 00:00.

Para ihop följande:

$f(7)$ — **19** mm

$f'(7)$ — **3,4** mm/h

Svårighet

Låg ○ ○ ○ ○ ○ Hög

Kommentar:

2. Låt $f(t)$ ange den sträcka som en kropp förflyttats efter tiden t.

Para ihop följande:

$f'(t)$ — **11,6** m

$f(t)$ — **8,2** m/s

Svårighet

Låg ○ ○ ○ ○ ○ Hög

Kommentar:

Figur 5. Skillnaden mellan f(x) och f′(x) i en kontext, uppgift 1 och 2.

I uppgift 1 i figur 5 ser vi både enheten *mm* och den sammansatta enheten *mm/h*. För att ytterligare tydliggöra skillnaden mellan *f* och *f′* sattes argumenten lika – i och med likheten kunde ingen ledtråd hittas i argumenten. Nyckeln för elever att lösa uppgift 1 ligger i att göra en enhetsanalys. Eleverna påtalade ingen särskild svårighet i denna uppgift och samtliga klarade uppgiften. Eleverna skattade svårigheten som låg. En tolkning kan vara att uppgiften uppfattades som relativt konkret med storhetsparen *ackumulerad nederbörd* respektive *nederbördsintensitet*. En kommentar från en samhällselev var: *f′ associerad med hastighet/fart*. En annan kommentar från samma grupp var *Självklart, prim mäter hastighet*.

3. Hastigheten av en kropp ges av $f(t)$, där t är tiden.

Para ihop följande:

$f'(5,2)$ — **5,4** m/s

$f(5,2)$ — **2,9** m/s²

Svårighet

Låg ○ ○ ○ ○ ○ Hög

Kommentar:

4. Mängden vatten i en tank vid tiden t ges av funktionen $f(t)$.

Para ihop följande:

$f(10,4)$ — **42** l/min

$f'(6,1)$ — **2107** l

Svårighet

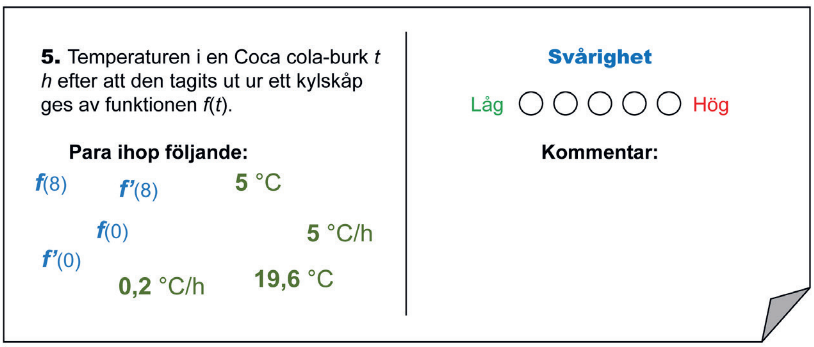
Låg ○ ○ ○ ○ ○ Hög

Kommentar:

Figur 6. Skillnaden mellan f(x) och f′(x) i en kontext, uppgift 3 och 4.

I uppgift 3, figur 6, infördes en ny svårighet. Funktionen *f* angav nu en hastighet; alltså ett värde med en enhet som i sig är sammansatt. Eleven förväntas här inse att derivatan av *f* motsvarar en acceleration med enheten m/s^2. Inte heller här gav argumenten någon användbar information. Dessa elever läser i skrivande stund kursen Fysik 1, och har alltså redan bekantat sig med begreppet *acceleration* och enheten m/s^2, men utan den matematiska språkdräkten med derivator som de stöter på i Matematik 3c. Flera elever ansåg att svårighetsgraden var något högre. Här följer ett axplock av citerade kommentarer från NA/TE-programmen: *Det lite svårare var att kolla vad hastigheterna stod för. Jag tittade på enheten. Lite svårare än föregående.* Samtliga klarade uppgiften. På samhällsprogrammet gick det sämre: *Vet ej om hastigheten fördubblas vid prim. Vet inte riktigt vad som menas.*

Uppgift 4, figur 6, hade en annan karaktär. Den handlade inte om hastighet i meningen fysisk förflyttning per tidsenhet, utan om hastighet i en mer överförd betydelse. Två elever bedömde uppgiften som ganska svår medan övriga bedömde den som lätt och samtliga elever klarade uppgiften. Bland elevernas kommentarer fanns: *Enheter gjorde uppgiften lättare. Tittade på enheterna. Logiskt tänkande.* En iakttagelse vi själva gjorde var att mätetalet för volymen är oerhört stort i förhållande till förändringshastigheten, vilket kan ge en antydan om att mätetalet 2107 hänger ihop med volym. Hade mätetalen kastats om, hade eleverna fått rejäl kognitiv dissonans. Samtliga elever klarade uppgiften.



Figur 7. Skillnaden mellan f(x) och f'(x) i en kontext, uppgift 5.

Eleverna uppfattade uppgift 5, figur 7, som något mer komplex och de hamnar ännu längre ifrån begreppet hastighet i dess ”rörliga” form: *Man fick tänka lite, men den var inte särskilt svår. Det fanns flera alternativ som gjorde det lite svårare. Bra uppgift, lite svårare men inte för svår. Man fick tänka, f'(0) & f'(8) var lite kluriga.* Här hade eleverna nytta av att identifiera enheterna. Uppgift 5 innebar dock högre komplexitet med de båda paren av argument (0 *h* och 8 *h*). Eleverna måste utgå ifrån sina vardagserfarenheter kring hur temperaturer fungerar. Som en elev uttryckte det muntligen: *Det går ju snabbast i början.* Samtliga elever på NA/TE-programmen klarade uppgiften. Betydligt sämre gick det på SA-programmet: *Ingen aning, förstår inte* och den mer kryptiska *Svårt att avgöra med få tal.*

Slutsats

Kommentaren *Jag tittade på enheten* var genomgående vanlig – och önskvärd. Det är slående hur SA-programmets elever hade svårare med att lösa de uppgifter som förutsätter enhetshantering. Det är rimligt att SA-elever under kursen Matematik 3b är mindre förtrogna med enhetshantering än NA/TE-elever som möter enheter i ämnena kemi och fysik. Detta blev uppenbart i uppgift 3 som involverade acceleration, som SA-eleverna inte arbetat med på samma sätt.

Vår slutsats blev att eleverna på NA/TE-programmen tog stöd i enhetsanalys för att lösa uppgifterna, och det räckte ofta en bra bit. Det förefaller som att det är möjligt att styra elevernas arbetssätt till ett väl fungerande sådant genom övningar av ovanstående slag. Såvitt vi kan bedöma togs uppgifterna emot med intresse och eleverna tog sig an dem relativt lustfyllt!

Något som verkligen vore intressant att se är vad som hade hänt om vi i någon av uppgifterna hade lagt in ytterligare svårigheter. Det skulle kunna röra sig om något alternativ extra, antingen i blått eller grönt, för att ge eleverna en extra distraktor, som exempelvis det absurda alternativet 50 °C/h i grönt till uppgift 5.

En upptäckt vi gjorde var att eleverna överlag hade adekvata färdigheter med sig vad gäller enhetshantering, men det kan inte uteslutas att en större studie hade avslöjat sådana brister på sina håll. Naturligtvis vore det intressant att se en studie i större skala på området tolkning av derivator. Validiteten är låg eftersom studien endast omfattar en gymnasieskola. Det vore också intressant att göra en uppföljande studie för integralkalkyl: Hur kan enheten till sökt svar ge upplysning om när man ska integrera en funktion?