Calle Rosell & Kristin Strand

Hur kan man inte se det?

Utifrån sin 25-åriga erfarenhet undrar två matematiklärare vad det är som gör att elever på högstadiet inte kan se logiken bakom enheter för att enklare lösa proportionalitetsproblem. Genom en undersökning i sina klasser ser de möjligheter i undervisningen för att öka elevernas förståelse av enheter.

Hur kan man inte se det? Den frågan har vi ställt oss själva otaliga gånger under våra 25 år som matematiklärare. På tavlan står det skrivet att en bil kör i hastigheten 67 km/h. Som matematiklärare ser man det självklara: Enheten km/h talar tydligt om att en division ligger bakom svaret. Inte ens en soluppgång är lika uppenbar. Vi slänger ut frågan i klassen:

– Hur räknar man ut hastighet? (fart)

Det är nästan helt tyst i klassrummet, ytterst få händer i luften. Hur kan man inte se det? Världens bästa ledtråd står ju skriven på tavlan. Enheten talar sitt tydliga språk: sträcka dividerat med tid. Någonting gör att eleverna inte ser det. Jag ger ledtråden att *i matematiken betyder ordet per division*. Det hjälper inte. Efter lite lirkande och stöd lyckas vi tillsammans komma fram till att man utför en division. Sträcka dividerat med tid. Men innerst inne vet vi tyvärr, att få eller ingen egentligen riktigt har förstått det som vi vill att de ska förstå. Nämligen att bara genom att titta på denna enhet, så kan man se vilken uträkning som ligger bakom. Eleverna har under sin tid i skolan fått metoder att använda för att räkna ut hastighet, men de har fortfarande inte förstått enhetens betydelse. Varför? Hur kan det komma sig?

Ett ULF-projekt om att tänka på enheten

Just enheter har vi båda två tänkt ganska mycket på under våra år som matematiklärare. Vi har angripit problemet på lite olika sätt, men aldrig lyckats nå någon speciell framgång. Det är dock något som skavt i oss under alla dessa år. Tänk vad mycket eleverna hade kunnat förstå och vilka fantastiska samband de skulle kunna se om de förstod enhetsanalysen. Vi har därför aldrig riktigt velat släppa det, även om vi under senare år förlikat oss med tanken på att det är något som kommer av sig självt när eleverna blir äldre.

Mot denna bakgrund tyckte vi att det var intressant att få delta i ett ULF-projekt vid Malmö universitet om proportionalitet inriktat på dimensionsanalys, som vi för elevernas skull kallar enhetsanalys. Det gav oss chansen att verkligen jobba med den fråga som gäckat oss i så många år: *Hur kan man inte se det?*

Alla elever har någon gång varit i en affär och antagligen sett etiketten jämförelsepris. Utan att förstå att etiketten visar en proportionalitet, så har eleverna kunnat förstå vilken vara som är billigast. Ur detta tänker vi att begreppet proportionalitet skulle vara tämligen enkelt att introducera, men så är inte fallet. Proportionalitet är bevisligen väldigt svårt att förstå och vår egen enkla förklaring till att elever på högstadiet inte klarar detta har varit att det handlar om för lite kunskaper i matematik, kombinerat med en matematisk omognad. Att skriva ut enheter i svar på matematikuppgifter är, för många elever, mest något man gör för att läraren ska bli nöjd. Att enheten skulle ha någon djupare mening verkar inte finnas hos majoriteten av elever på högstadiet.

Vi har också, sedan många år, noterat att i den ena delen av de nationella proven i matematik i årskurs 9 står alla enheter redan utskrivna i svarshäftet. Eleverna behöver bara skriva tal, inte tänka på enheterna. Det går naturligtvis att spekulera i varför provkonstruktörerna gör på detta sätt, men i ljuset av detta ULF-projekt tror vi inte att det gynnar elevernas förståelse för enheternas betydelse. En ändring ser dock ut att vara på gång då den nya läroplanen Lgr 22 har med dessa två punkter i det centrala innehållet:

- Proportionalitet och hur det används för att uttrycka skala, likformighet och förändring.
- Härledda enheter, till exempel km/h och kr/kg.

Enligt vår projektledare Jöran Petersson har det inte forskats speciellt mycket på enhetsanalys i svensk grundskola. Utifrån detta bestämde vi oss för att göra en mycket enkel prövning på Genarpsskolan. Prövningen skulle fokusera på att undersöka enheters betydelse för elevers förståelse. Hur samverkar praxis, elevernas metoder, och logos, elevernas resonemang, när de ska lösa uppgifter med proportionalitet? Var i processen använder eleverna sig av olika lösningsmetoder? Vari ligger skillnaden när elever förstår eller när de bara gör? Är det språket, metoder/strategier eller modeller?

Genomförande

Prövningen genomfördes på Genarpskolan vårterminen 2022. Två klasser i årskurs 9 utgjorde underlaget. För att ha möjlighet att dra några slutsatser bestämde vi oss för att göra förtest och eftertest. Vi ville kunna se någon form av utveckling och förhoppningsvis förstå vad den berodde på. Mellan de båda testerna skulle vi genomföra olika lärmoment, såsom traditionell undervisning, grupparbete, observationer och intervjuer med elevgrupper. Totalt deltog 65 elever, men på grund av sjukdom så kom inte alla att räknas in i underlaget. Endast de som genomförde alla moment kom att tas med i resultatet, totalt 39 elever.

Eleverna fick reda på att de skulle ha ett oförberett test. De fick inte veta någonting om innehållet. De har under sina år i grundskolan stött på problem av sådan karaktär som vi hade på testen, men för tillfället låg det några månader bak i tiden. De kom alltså till förtestet utan alltför aktuella kunskaper om just detta. Testfrågorna handlade uteslutande om olika hastighetsproblem. Uppgifterna var blandade och framtagna för att variationen skulle var så stor som möjlig, av olika svårighetsgrad och olika typer. Inte bara division. I de flesta av uppgifterna var en storhet okänd, medan ett par uppgifter saknade två storheter. Eleverna genomförde testet enskilt och det var tillåtet att använda miniräknare.

Efter förtestet genomfördes några veckors undervisning där vi fokuserade undervisningen på olika enheter. Lektionerna genomfördes både som katedergenomgångar och grupparbete. Vi blandade enheter som eleverna sett tidigare, exempelvis *m/s*, men vi tog även upp för eleverna okända enheter, till exempel mol/dm^3. Tanken var att eleverna skulle vänja sig vid att titta på enheten och förstå uträkningen bakom.

Vi försökte hålla problemställningarna så lika som möjligt, förutom att enheten ändrades. De flesta lektioner avslutades med att elever skulle ta fram en triangel som kunde beskriva det de gjort, likt hastighetstriangeln som är ganska väl använd i svensk matematikundervisning. Vår tanke var att elevernas arbete med att ta fram en triangel på ett visst samband skulle ge dem förståelse för att ur enheterna skapa samband. Med andra ord var sambandstrianglarna inte målet i sig. Det var istället själva skapandet av dem som var målet med elevernas arbete. Så förutom *m/s* och *kr/h*, som ingick i testen, fick de jobba med *kr/kg* och *fotsteg/s* (det vill säga löpning uppför trappor).

Lektionsobservationerna genomfördes utifrån analysmetoden praxeologi, där praxis fokuserar på hur elever gör, medan logos syftar på elevernas matematiska argument för att göra som de gör. Uppgifterna hade den karaktären att vi ville kunna se praxis, vilka metoder som eleven använde sig av, men också utifrån logos i form av elevers matematiska resonemang. Våra frågor och uppgifter till eleverna under observationerna behövde således ställas så att vi fick svar i både teori och praktik. Vi ville helt enkelt komma åt hur eleverna hade tänkt. Enligt variationsteorin sker ett lärande när man urskiljer de delar av ett innehåll som varierar mot en konstant. Genom detta ville vi ge eleverna samma uppgifter fast med små förändringar som möjligen kunde generera nycklar till elevernas lärande. Exempel på liknande uppgifter, men med olika enheter:

> Du kör 55 km på 3 timmar. Vilken är din medelfart?
>
> Du handlar för 45 kr och får då 7 kg potatis. Vilket är priset per kilogram?
>
> Du springer uppför en trappa som har 454 steg, vilket tar dig 110 sekunder. Hur många trappsteg tar du varje sekund?
>
> Du tjänar 450 kr. Du har då jobbat i 7 timmar. Hur mycket tjänar du varje timme?

Exempel på uppgift där två storheter saknas:

> Du kör 70 km/h. Ge två exempel på hur långt du hinner och vilken tid det tar.

Elevernas praxis

Resultaten från de båda testerna visar, rent poängmässigt, på en uppgång. De flesta elever skriver bättre på sluttestet än vad de skrev på förtestet. Vi anser dock att det är ett alldeles för litet material för att dra några slutsatser. Vidare kan vi inte säga vad förbättringen beror på. Det kan ju vara det nya arbetssättet, men det kunde lika gärna blivit ett liknande resultat om vi undervisat mer traditionellt om detta. Uppgången i resultat talar inte heller om ifall det beror på en ökad förståelse för enheterna, eller om eleverna bara blivit säkrare på att använda trianglar och färdiga formler. Formeltrianglar går utmärkt att använda utan att man har någon som helst förståelse för vad de innebär.

Vi tycker att vi kan dra fler slutsatser ur observationerna. Där ser vi att när eleverna får uppgifter som har en tydlig problemställning, så löser många det med svt-triangeln. Eleverna behöver enbart använda praxis för att lösa uppgifterna. Exempel på uppgift under observation:

> Du kör i medelhastigheten 60 km/h. Hur långt hinner du köra på 3 h?

Vi ser att eleverna inte funderar nämnvärt på vad som verkligen står i uppgiften utan de löser uppgiften nästan mekaniskt med hjälp av triangeln. Att eleverna huvudsakligen löser uppgiften inriktad på praxisdelen tror vi handlar om att undervisningen sedan tidigare generellt har haft sin tyngd i att använda olika lösningstekniker.

Att undervisa även för logos

I ett försök att rikta eleverna mot ett mer logostänk, det vill säga att öka reflektionen kring vad uppgiften går ut på, så ändrade vi språket. Vi lyfte alltså bort de vanligt förekommande matematiska termerna och begreppen kring hastighet och tid och presenterade uppgiften igen fast då i en enklare språklig kontext. Praxeologins båda delar behöver finnas närvarande i all matematik, det ena är inte bättre än det andra men för vår prövning ville vi se om även logos kunde skönjas hos eleverna. Observatören läste upp frågan en gång till för eleverna, men denna gång med lydelsen ”… på en timme …”.

> Du kör i medelhastigheten 60 km *på en timme*. Hur långt hinner du köra på 3 h?

När eleverna fick höra uppgiften läsas upp i en annan språklig utformning upptäckte vi att triangeln inte behövdes i samma utsträckning. Eleverna resonerade snabbt utifrån ett förenklat språk på ett mer logiskt sätt, det vill säga logos. Det förvånade oss vilken kraft som språket hade för att ändra elevernas möjligheter att närma sig en förståelse utifrån samband i de matematiska områdena.

En ny fråga som vi ställde oss var om eleverna kunde lösa proportionalitetsproblem utan att det fanns fullständiga enheter. Kunde det vara så att enheten *km/h* gjorde att eleverna räknade mer mekaniskt och tappade logos? Vi bestämde oss för att ge eleverna samma uppgift igen, där enheten var delvis bortplockad. Vi gjorde detta för att vi ville se om eleverna förstod sambandet i triangeln eller om de enbart använde sig av en strategi och att förståelsen var sekundär. Vi uppfattade att ju osäkrare eleverna var i sitt räknande desto mer ville de stödja sig i sin triangel, som de visste fungerade i alla lägen.

Vid några uppgifter tidigare hade vi låtit eleverna själva skapa egna trianglar utifrån andra matematiska samband, exempelvis pris per kilogram och kronor per timme. Vi såg att eleverna skapade fungerande trianglar, men kunde vi verkligen veta om de kunde motivera varför lösningstekniken var användbar och förklara och bevisa varför tekniken fungerade, det vill säga hur sambandet såg ut? Exempel på uppgiften som eleverna fick nästa gång löd:

> Du kör i hastigheten 60, hur långt hinner du köra på 3 h?

Eleverna läste frågan flera gånger. De tvekade. Det syntes tydligt att det var något som skavde hos dem, men de hade svårt att hitta vad som inte stämde. De läste om och om igen. De försökte tolka det de läste och de försökte sortera in uppgiften i ett, för dem, känt mönster och en rutin för hur de brukade lösa uppgifterna. De ville ha något att hålla sig i.

Efter en stund, utan något svar, lade observatören till enheten i uppgiften. Eleverna kunde då räkna ut hur långt man kört. Ur detta trillar ett intressant tankeexperiment ner hos oss. Hur många elever skulle reagera på om man skrivit ut helt fel enheter i det nationella provhäftet i matematik. Det skulle kanske kunna vara en markör på högre betyg?

Saker vi upptäckt

Sammanfattningsvis tycker vi att vi ser en möjlighet att öka elevers förståelse för hur proportionalitet fungerar genom ökad förståelse för enheter. Fortsatt arbete med enheter kan ske enligt de lärdomar vi har dragit:

- *Variera språkdräkten för enheter.* Prata alltid om enheter och i alla situationer där sådana förekommer. Det gör att eleverna upprepade gånger hör enheten och förknippar den som en hjälp för att skapa samband. Det är även viktigt att uttrycka enheter på olika sätt. Storheten 3 *m/s*, kan uttryckas ”tre meter per sekund”, ”tre meter på en sekund”, ”tre meter på varje sekund”, men även ”för varje sekund som går så hinner du ta dig tre meter”.
- *Använd reciproka (inverterade) enheter.* Elever kan få svara på hastighetsproblem där man i deluppgifter frågar både efter a) *m/s* och b) *s/m*. Det går förstås bra att fråga efter reciproka enheter för vilken storhet som helst, exempelvis reciproka jämförelsepriser i *kg/kr* och *liter/kr* och även det reciproka paret frekvens – svängningar per tid och tid per svängning.
- *Var noga med att alltid skriva ut enheter, inte bara i svaret, utan även i uträkningarna.* 30 km/2 h = 15 km/h. Förfarandet kan kännas överdrivet och klumpigt i början. Faktum är dock att om enheterna belyses hela tiden, gynnar det elevernas förståelse för enheter och vad de står för. I vår undersökning har vi inte tittat på bråkstreckets orientering och vad det skulle kunna betyda för logos hos eleverna.
- *Ett undervisningssätt valde vi att kalla omvänd introduktion.* Om man ska undervisa om exempelvis tryck, så kan ett traditionellt tillvägagångssätt vara att beskriva tryck med olika experiment eller exempel från elevernas värld. Genomgången kanske följs av räkneexempel och slutligen dyker enheten N/m^2 upp på tavlan. I omvänd introduktion börjar man med att skriva enheten N/m^2 på tavlan. Sedan ställer man sig en rad olika frågor utifrån aktuell enhet. Vad betyder enheten? Vilket räknesätt ligger bakom enheten? Vilka fler inbördes enheter finns? Vad måste vi veta för att kunna räkna ut tryck? Hur får vi reda på detta? Och så vidare.
- *En mycket intressant sak som vi upptäckte, men som vi inte riktigt hann följa upp var att skriva ut en etta i nämnaren på till exempel en hastighetsenhet.* Som vi tidigare belyst, så upptäckte vi hur stor roll språket spelade för förståelsen. Även till synes små förändringar

i språket kunde stötta elevernas förståelse. Det visade sig vara stor skillnad på att skriva *x m/s* och att skriva *x m/*1*s*. En etta i nämnaren lyfter fram enhetens betydelse, alltså sekundens betydelse på ett mycket tydligare sätt än det traditionella skrivsättet.

✦ *Vi har även sett ett rent matematiskt problem som vi tror är betydligt större och viktigare än man kan ana*, men som ingen av oss tidigare ägnat en tanke åt. Nämligen vad som händer när man räknar ut följande uppgift: 3 m/0,8 s = 3,75 m/s. Den stora frågan är då: Vad händer med 0,8? Elever har väldigt svårt att förstå hur 0,8 i nämnaren plötsligt försvinner eller förvandlas till en etta. Det är mycket spännande att fråga eleverna i klassen om ovanstående två hastigheter är lika snabba? Kanske är detta en av nycklarna till att förstå enhetsanalysen? Eller är enhetsanalys med nämnaren 3,75 m/1s en nyckel till att förstå division med decimaltal?

LITTERATUR

Marton, F. & Tsui, A. (2004). *Classroom discourse and the space of learning.* Lawrence Erlbaum.

Taub, D. (2013). *Den dolda ettan*. Nämnaren 2013:1.