Monica Delorme & Annika Schoug

Få syn på resonemangen

Det tycks vara svårt att lära sig resonera proportionellt och författarnas upplevelse är att det också är svårt att undervisa om proportionalitet. De deltog i ett ULF-projekt vid Malmö universitet och inspirerades att söka ett användbart arbetssätt för att synliggöra och utveckla elevernas föreställningar och resonemang utan att fastna i metoder och regler.

Vad innebär det att kunna resonera proportionellt? Enligt våra erfarenheter av undervisning verkar vissa elever ha en intuitiv känsla för proportionalitet. Vi ville ta reda på vad det var dessa elever kunde och som andra inte kunde. Flera artiklar citerar Susan Lamon som anser att en elev som kan resonera proportionellt har följande förmågor:

- Have a sense of covariation. They understand relationships where a change in one quantity causes a corresponding change in another.
- Recognize proportional relationships as distinct from non-proportional relationships.
- Have a wide variety of informal methods for solving proportions and comparing ratios.
- Understand a ratio as an entity distinct from the quantities it compares.

Ett proportionellt resonemang innebär alltså att känna igen när två storheter samvarierar och när de inte gör det, och att ha en uppsättning informella metoder att lösa proportionalitetsproblem. Den sista punkten tolkar vi som att eleven känner till att om täljare och nämnare har enheter, så har kvoten inte samma enhet som dem. Vi utgick från Lamons beskrivning när vi gick vidare i vårt arbete med att konstruera uppgifter och ta fram ett arbetssätt som kunde synliggöra elevernas resonemang.

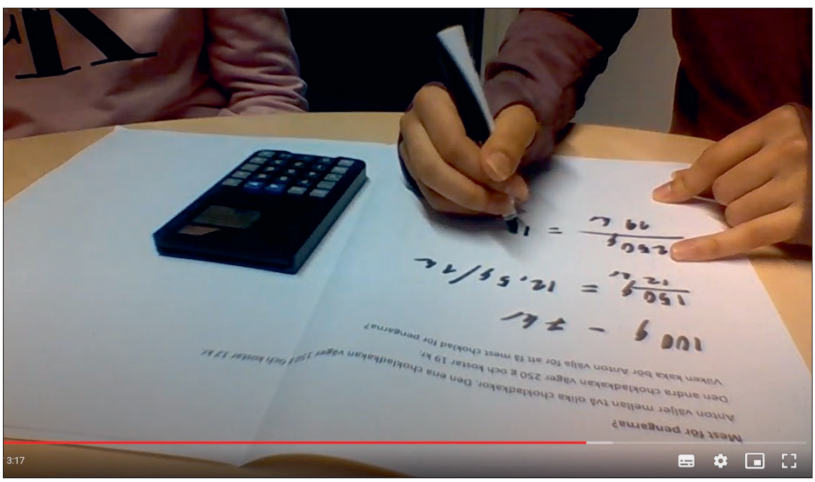
Vårt arbetssätt

Vi ville hitta ett arbetssätt för att synliggöra elevernas sätt att tänka kring proportionalitet. Deras tankar och idéer skulle vi sedan använda i undervisningen för att hjälpa dem att utveckla sina resonemang. Vi bestämde oss för att låta eleverna göra inspelningar medan de löste uppgifter som krävde att de resonerade proportionellt. Arbetssättet användes i två klasser i årskurs 8 och i en gymnasieklass på ett yrkesförberedande program. Vi arbetade med inspelningarna under en termin. Detta skedde under en del av en lektion i ett upprepat tvåveckorsmönster. Första veckan filmade eleverna när de löste uppgiften och den andra veckan följde vi gemensamt upp deras lösningar i klassen.

Uppgifterna skulle gå att lösa på flera olika sätt och det var önskvärt med en blandning av uppgifter för att visa olika aspekter av proportionalitet. Vi la ner mycket tid på att söka upp och skapa lämpliga uppgifter. Det skulle finnas olika representationer såsom bild, tabell och text. Kontexten skulle vara bekant för alla men ändå variera mellan uppgifterna. Det blev två olika huvudtyper av uppgifter som vi har kallat *jämförelseproblem* och *saknat värde*. Eftersom felaktiga strategier skulle avslöjas lutade vi oss mot våra tidigare erfarenheter av hur eleverna kan tänka fel för att skapa rätt distraktorer i framförallt jämförelseproblemen.

Genomförandet

Eleverna lottades i par och de tilldelades en avskild plats på skolan. De använde en dator och fick en försluten uppgift. För att undvika att filma elevernas ansikte riktades datorns kamera mot bordet så att endast uppgiftspappret och händerna syns. Eleverna öppnade förslutningen och läste upp uppgiften framför kameran för att inspelningen skulle fånga upp resonemangen från första början. Medan uppgiften löstes skrev eleverna tillsammans på pappret men ljudupptagningen var det viktigaste. Inspelningen fick vara högst 10 minuter lång. Om eleverna inte kände sig klara skulle de ändå avbryta och återvända till klassrummet. När de var tillbaka i klassrummet laddade eleverna upp filmerna i Google Classroom som är den miljö som de är vana att arbeta i. Det kan tilläggas att före den första filminspelningen övade vi tillsammans i klassrummet på att placera datorn så att lösningen blev väl synlig och ljudupptagningen av hygglig kvalitet.



Datorns kamera riktades neråt så att pappret och händerna syntes och inspelningen dokumenterade skrivandet och samtalet hos gruppen.

Efter lektionen hade vi lärare ett par dagar på oss att var för sig titta igenom inspelningarna för att se hur eleverna tog sig an uppgifterna och vilka strategier de använde. Vi sorterade och klassificerade lösningarna vilket kunde bli lite olika beroende på uppgiftens karaktär. Vilka strategier använde eleverna och hur effektiva var dessa? Vilka feltänk fanns bland lösningarna, fanns det till exempel elever som urskilde additiva samband och använde dessa där det inte var möjligt?

Sedan träffades vi lärare och delade våra erfarenheter med varandra. Då planerade vi också tillsammans uppföljningen och hur vi skulle använda resultaten för att hjälpa eleverna att utveckla sina resonemang.

En vecka efter inspelningarna arbetade vi i klasserna med uppföljning. De olika lösningsstrategierna presenterades på tavlan och vi samtalade kring vilka strategier som var mest effektiva, vilka som var lättast att förstå och vilka som var vanligast. Vi värderade lösningarna tillsammans med eleverna. Ibland fick eleverna lösa eller skapa någon liknande uppgift eller använda resultatet i ett nytt sammanhang.

Vi visar några exempel på uppgifter som genomfördes, resultat, kategoriseringar och uppföljningar:

Koka gröt – uppgift av typen saknat värde

Den första uppgiften eleverna filmade var "Koka gröt" som är av typen saknat värde. 17 elevpar arbetade med uppgiften, fyra par i gymnasieklassen och 13 par i årskurs 8.

Johan ska koka gröt men har inte fått med all information i receptet. Hjälp honom att fylla i det som saknas.

Salt	1,5 krm	1 krm	2 krm
Gryn		2 dl	
Vatten	7,5 dl		

I receptet syns mängden ingredienser till olika antal portioner.

- Två grupper löser hela uppgiften genom att enbart använda sig av multiplikativa samband för samma ingrediens. (Se gröna respektive röda pilar i figur på nästa sida.)
- En grupp löser hela uppgiften genom att enbart använda sig av multiplikativa samband mellan olika ingredienser. (Se blå respektive svarta pilar i figur på nästa sida.)
- Sju grupper i årskurs 8 och samtliga fyra grupper i gymnasieklassen löser hela uppgiften genom att använda multiplikativa samband både mellan olika ingredienser och för samma ingrediens.
- En grupp löser delar av uppgiften genom att använda multiplikativa samband för olika ingredienser när mängden gryn ska bestämmas men övergår till att urskilja ett additivt förhållande mellan två olika antal portioner när mängden vatten ska bestämmas: "eftersom det skiljer ½ krm salt så ska det skilja ½ dl vatten mellan de olika antalen portioner".
- Två av grupperna löser ingen del av uppgiften och urskiljer förhållande för samma ingrediens som additiva.

Vi gick tillsammans igenom på tavlan alla olika multiplikativa förhållanden som vi kunde hitta både inom och mellan de olika antalen portioner:

Salt	1,5 krm	1 krm	2 krm
Gryn	3 dl	2 dl	4 dl
Vatten	7,5 dl	5 dl	10 dl

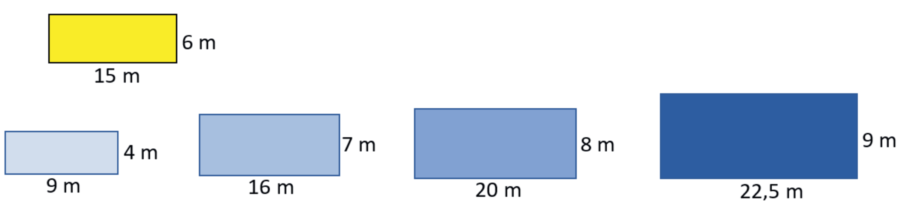
De gröna respektive röda pilarna visar multiplikativa samband för samma ingrediens mellan två olika antal portioner. De blå respektive svarta pilarna visar multiplikativa samband mellan olika ingredienser inom samma antal portioner.

Rektanglar – uppgift av typen jämförelseproblem

I uppgiften ”Rektanglar” är målet att undersöka vilka samband eleverna urskiljer då det finns flera förhållanden att beakta.

Rektanglar

Vilka av de blå rektanglarna är förstoringar eller förminskningar av den gula rektangeln?
(det vill säga har samma proportioner)



Eleverna kan dels jämföra och se om förhållandet mellan bas och höjd i den gula rektangeln är lika med förhållandet mellan bas och höjd i någon eller några av de blå rektanglarna, det vill säga bas1/höjd1 = bas2/höjd2 (inom rektanglarna). Dels kan de jämföra och se om förhållandet mellan basen i den gula rektangeln och basen i respektive blå rektangel är lika med förhållandet mellan höjden i den gula rektangeln och höjden i respektive blå rektangel, det vill säga höjd1/höjd2 = bas1/bas2 (mellan rektanglarna). Dessutom kan eleverna urskilja additiva samband men använda dem felaktigt.

16 elevpar arbetade med uppgiften, 13 par i årskurs 8 och tre par i gymnasieklassen.

✦ Samtliga tre gymnasiegrupper löser uppgiften genom att använda multiplikativa samband inom rektanglarna såsom $\frac{15}{6} = \frac{20}{8}$.

- Tre grupper i årskurs 8 löser uppgiften genom att använda multiplikativa samband mellan rektanglar både direkt såsom $1\frac{1}{3}\cdot 6=8$ och $1\frac{1}{3}\cdot 15=20$ samt omvänt $\frac{3}{4}\cdot 8=6$ och $\frac{3}{4}\cdot 20=15$.
- Två grupper (åk 8) löser uppgiften genom att direkt använda multiplikativa samband för att jämföra proportioner mellan rektanglar.
- En grupp (åk 8) använder några multiplikativa samband för att jämföra proportioner mellan rektanglar men identifierar också additiva samband.
- En grupp (åk 8) identifierar endast additiva samband både mellan och inom rektanglar såsom $15+1=16$ och $6+1=7$.
- Sex grupper (åk 8) förstår inte uppgiften utan beräknar rektanglarnas area.

Ingen av grupperna i årskurs 8 använde sig av multiplikativa samband inom rektanglarna vilket i detta fall varit en mer effektiv metod som lett till färre beräkningar. Hälften av eleverna i årskurs 8 använde inte proportionella resonemang över huvud taget.

Här fanns mycket att arbeta med vilket vi gjorde vid två uppföljande tillfällen, en respektive två veckor senare. Vid första tillfället inledde vi med ett par olika interaktiva bilder, bland annat en svensk flagga, som vi drog i och förstorade och förminskade både med bibehållna proportioner och med förändrade proportioner. Vi undersökte tillsammans också hur proportionerna ändrades när man byggde på en rektangel med lika många längdenheter i båda riktningarna eftersom en del elever identifierat additiva samband och använt dessa.

För att förklara innebörden av proportioner använde vi den svenska flaggan.

Avslutningsvis tittade vi på alla multiplikativa samband mellan rektanglarna (vilket eleverna i åk 8 använt) samt multiplikativa samband inom rektanglarna (vilket eleverna i åk 8 inte använt).

Vid det andra tillfället tog vi återigen fram bilden på rektanglarna och repeterade hur man kan avgöra om rektanglarna har samma proportioner genom att jämföra proportionerna mellan bas och höjd. Därefter fick eleverna skapa egna rektanglar med samma proportioner som den gula rektangeln. Nu förstod eleverna och det blev många olika rektanglar ritade i klassrummet.

Gymnasiegrupperna som löste uppgiften genom att se det multiplikativa sambandet inom rektanglarna skissade tillsammans på tavlan och gav exempel på andra figurer med nya proportioner.

Jämförpris – uppgift av typen jämförelseproblem

Den femte uppgiften eleverna filmade var ”Mest för pengarna?” som är av typen jämförelseproblem.

> **Mest för pengarna?**
>
> Anton väljer mellan två olika chokladkakor. Den ena chokladkakan väger 150 g och kostar 12 kr.
>
> Den andra chokladkakan väger 250 g och kostar 19 kr.
>
> Vilken kaka bör Anton välja för att få mest choklad för pengarna?

18 elevpar arbetade med uppgiften, 14 par i årskurs 8 och fyra par i gymnasieklassen. Samtliga par löste uppgiften snabbt och några par gav förslag till alternativa lösningar. Eleverna hade vid tidigare tillfällen arbetat mycket med enhetsanalys och sammansatta enheter och kunde nu utnyttja det i denna uppgift.

- Sju åk 8-grupper och tre gymnasiegrupper beräknar *g per krona* för att jämföra priserna.
- Tre åk 8-grupper och en gymnasiegrupp beräknar *kr per kg*.
- Två åk 8-grupper beräknar *kr per 250 g* och tre grupper anger detta som en alternativ lösning.
- En åk 8-grupp beräknar *kr per 50 g*.

En vecka senare följde vi upp uppgiften i helklass. Elevparens olika vägar för att lösa uppgiften sammanfattades av oss lärare och visades på tavlan. Vi samtalade kring hur eleverna tänkt samt värderade lösningarna.

g/kr

Choklad 1: $\frac{150\text{ g}}{12\text{ kr}} = 12{,}5\text{ g/kr}$

Choklad 2: $\frac{250\text{ g}}{19\text{ kr}} = 13{,}157\ldots\text{ g/kr}$

Alltså ger Choklad 2 mer för pengarna

7 grupper

kr/kg

Choklad 1: $\frac{12\text{ kr}}{150\text{ g}} \cdot 1000 = 80\text{ kr/kg}$

Choklad 2: $\frac{19\text{ kr}}{250\text{ g}} \cdot 1000 = 76\text{ kr/kg}$

Choklad 1: $\frac{1000\text{ g}}{150\text{ g}} \cdot 12\text{ kr} = 80\text{ kr/kg}$

Choklad 2: $\frac{19\text{ kr} \cdot 4}{250\text{ g} \cdot 4} = \frac{76\text{ kr}}{1000\text{ g}} = 76\text{ kr/kg}$

3 grupper

Kilopriset (kr/kg) är lägre för Choklad 2 som alltså ger mer för pengarna

kr/250g

Choklad 1: $\frac{12\text{ kr} /3}{150\text{ g} /3} = \frac{4\text{ kr} \cdot 5}{50\text{ g} \cdot 5} = \frac{20\text{ kr}}{250\text{ g}}$

Choklad 2: $\frac{19\text{ kr}}{250\text{ g}}$

Alltså ger Choklad 2 mer för pengarna

2 grupper + 3 grupper som alternativ lösning

kr/50g

Choklad 1: $\frac{12\text{ kr} /3}{150\text{ g} /3} = \frac{4\text{ kr}}{50\text{ g}}$

Choklad 2: $\frac{19\text{ kr}}{250\text{ g}} = \frac{3{,}6\text{ kr}}{50\text{ g}}$

Priset per 50 g är lägre för Choklad 2 som alltså ger mer för pengarna

1 grupp

Det här visades på tavlan vid uppföljningen.

Våra erfarenheter

Sammanfattningsvis så fungerade arbetssättet mycket bra för att synliggöra de proportionella resonemangen. Elever som vanligtvis inte tar så mycket plats i klassrummet trädde fram. Vi lärare fick syn på elever som inte kunde slutföra uppgiften själva men däremot gav värdefulla bidrag till dess lösning.

När eleverna hade vant sig vid arbetssättet gick det lätt att genomföra. Eleverna lärde sig snabbt hur ljud- och filminspelningarna skulle göras och detta förflöt så gott som alltid utan problem. Eleverna var positiva och motiverade inför uppgifterna och visade engagemang när uppföljningarna gjordes på olika sätt i helklass. För oss lärare var det värdefullt att genom inspelningarna få reda på hur eleverna resonerade och på så vis kunna forma uppföljningarna utifrån vad som saknades eller vad som kunde utvecklas.

Det är viktigt att använda väl genomtänkta uppgifter. För att det ska vara överkomligt att lyssna på alla elevinspelningar bör uppgifterna vara avgränsade så att de kan spelas in på kort tid. Arbetssättet fungerade bäst när eleverna arbetade i par. Om grupperna blev större så fanns det risk att någon elev blev passiv. Under inspelningarna behöver eleverna utrymme i skollokalerna för att i lugn och ro kunna filma sitt arbete.

En enskild lärare kan använda detta arbetssätt i sin undervisning, men vi fann det kollegiala samarbetet givande genom många tillfällen till goda pedagogiska samtal.

LITTERATUR

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Routledge.

Ahl, L. M. & Helenius, O. (2018). *Förhållanden, sammansatta enheter och proportionella resonemang.* Nämnaren 2018:1.

Månssons mannar