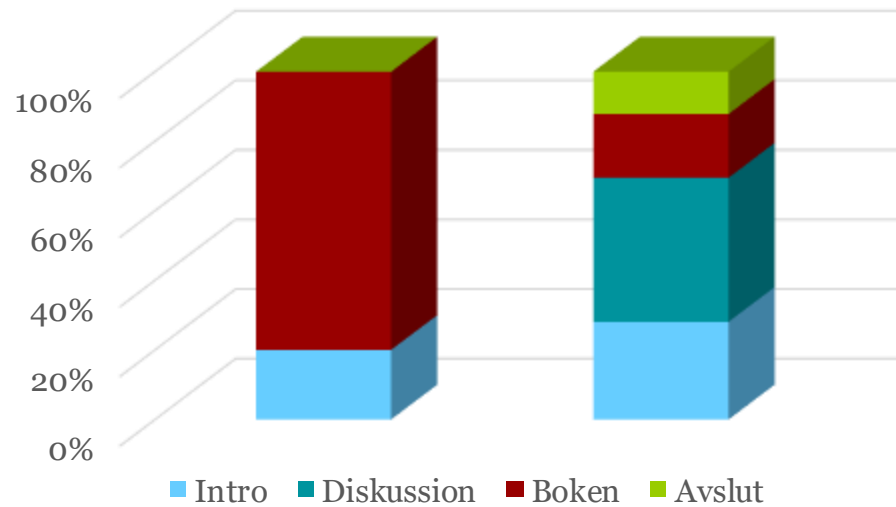


Rik matematikundervisning



Professionell bakgrund

- **Gymnasielärare** 2000 Ma och Hi
- **Fil. dr** 2006
- **Forskare** 2008-2011 Stockholms universitet och University of Oxford
- **Professor** Mälardalens universitet 2012-
- **Gästprofessor** Umeå universitet 2012-2015
- **Vetenskaplig expert** Västerås stad 2016-2018
- **Professor** Högskolan i Östfold 2017-2021
- **Gästprofessor** Örebro Universitet 2023-

Forskningsprogram

- **Storskalig etablering av rik matematikundervisning**
 1. Räkna med Västerås
 2. Kompetensutveckling
 3. Forskningsbaserade läromedel – Västerås och Eskilstuna
 4. Praktisknära lärarutbildningar
- **Sverige/Finland/Flandern/USA**
- Skolverket, Vetenskapsrådet, Regeringskansliet, Riksdagen, Skolfi, Sveriges lärare,...



Samhällsdebatten



"Vi har haft en övertro på att eleverna kan lära sig matematik själva genom att sitta och räkna", konstaterar professor Andreas Ryve vid

Foto: Ulrica Zwenger



Mälardalens högskola utvärderar matematiklyft

UPPDATERAD 8 APRIL 2016 PUBLICERAD 8 APRIL 2016

UTBILDNING. Grundskolorna i Karlskoga kommun satsar på matematiken



Andreas Ryve, forskare inom matematik, gästade under torsdagen Breidåkerskolan för att hålla en föreläsning om den nya utvärderingen. Tiden till pedagoger från olika skolor i Karlskoga. Nyheten startar redan under höstterminen, från årskurs ett. 52 Foto: Julia Olsson

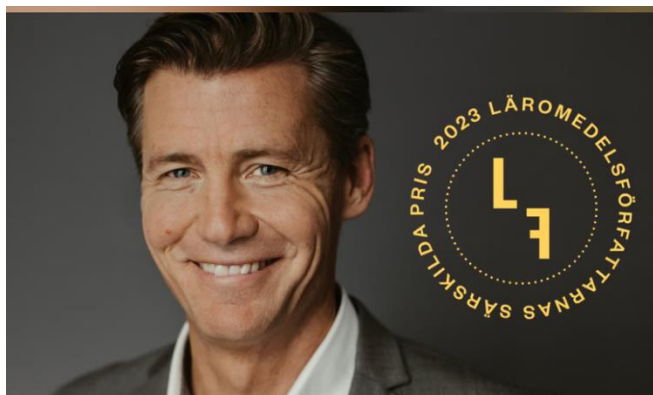


Foto: Kajsa Göransson

PRESSMEDDELANDE - 4 OKTOBER 2023 07:00

Professor i matematik tar emot Läromedelsförfattarnas pris



Andreas Ryve, professor i Matematikdidaktik på Mälardalens högskola i Västerås. Foto: Terje Lund/Sveriges Radio

FRAMTIDENS PEDAGOGIK

Forskare om lärarrollen: Vi har börjat en positiv resa

För mycket vardag och för lite matte

PUBLICERAD 28 NOVEMBER 2018

Hur ska man lära ut matte på bästa sätt i klassrummet? Den frågan har länge varit föremål för en intensiv debatt inom skolforskning. Nu ger en svensk studie svar.

Forskning för skolutveckling

*System av
resurser för
under-
visning*



*Lärare –
kunskap och
agerande*



*Rik
klassrums-
undervisning*



*Elever –
lärande,
föreställning,
känslor*

Eleven i rika klassrummet

KÄNSLOR OCH FÖRESTÄLLNINGAR

- Fokuserade, lugna och trygga,...
- Motivation och meningsfullhet
- Ägandeskap, självförmåga,
- Fel, kämpa, noggrann,...
- Känna sammanhang

KOGNITIVA PROCESSER

- Inte kognitivt överbelastade
- Brottas med matematiska problem
- Leta kopplingar
- Utmanande tankeprocesser som att generalisera, syntetisera, jämföra,...

Matematiskt tänkande,
förmågor och färdigheter

SJÄLVREGLERING

- Metakognition och självledarskap
- Reglera uppmärksamhet och lärande
- Reglera beteenden och motivation

AGERA I KLASSRUMSINTERAKTION

- Dela med sig, bidra till diskussion
- Ordningssam, respekterande,...
- Lyssna aktivt och försöka förstå
- Stödja, utmana, bygga vidare på matematiska resonemang

Rik matematikundervisning



Flera kompletterande sätt att definiera rik matematikundervisning

- Genomgripande dimensioner
- Lektionsfaser
- Komponenter av klassrummet
 - *matematiska uppgifter och förklaringsmodeller*
 - *interaktionsmönster, normer*
 - *elevroll*
 - *lärarrollen*
- Klassrumsaktiviteter
- Lärarens frågor, taktiker, handlingar, moves



Rik matematikundervisning - Dimensioner

1. Begreppsligt fokus, kognitiva utmaningar för elever där lärare och elever lyfter fram och bygger vidare på barns tänkande
2. Stödjande och uppmuntrande miljö med produktiva normer (mindset, sociala)
3. Lugn och strukturerad miljö

(Good et al., 2013; Klingberg, 2016; Schoenfeld, 2010)

Dimensioner av hög "instructional quality" (Praetorius, & Charalambous, 2018)

LÄRANDEUPPGIFTEN

- Träna fakta och procedurer
- Se kopplingar och driva förståelse
- Utmana elever till "cognitive struggle"

SOCIALA NORMER

- Stödjande klimat
- Höga förväntningar
- Inkluderande

Dimensioner av
ramverk för att mäta
undervisningskvalitet

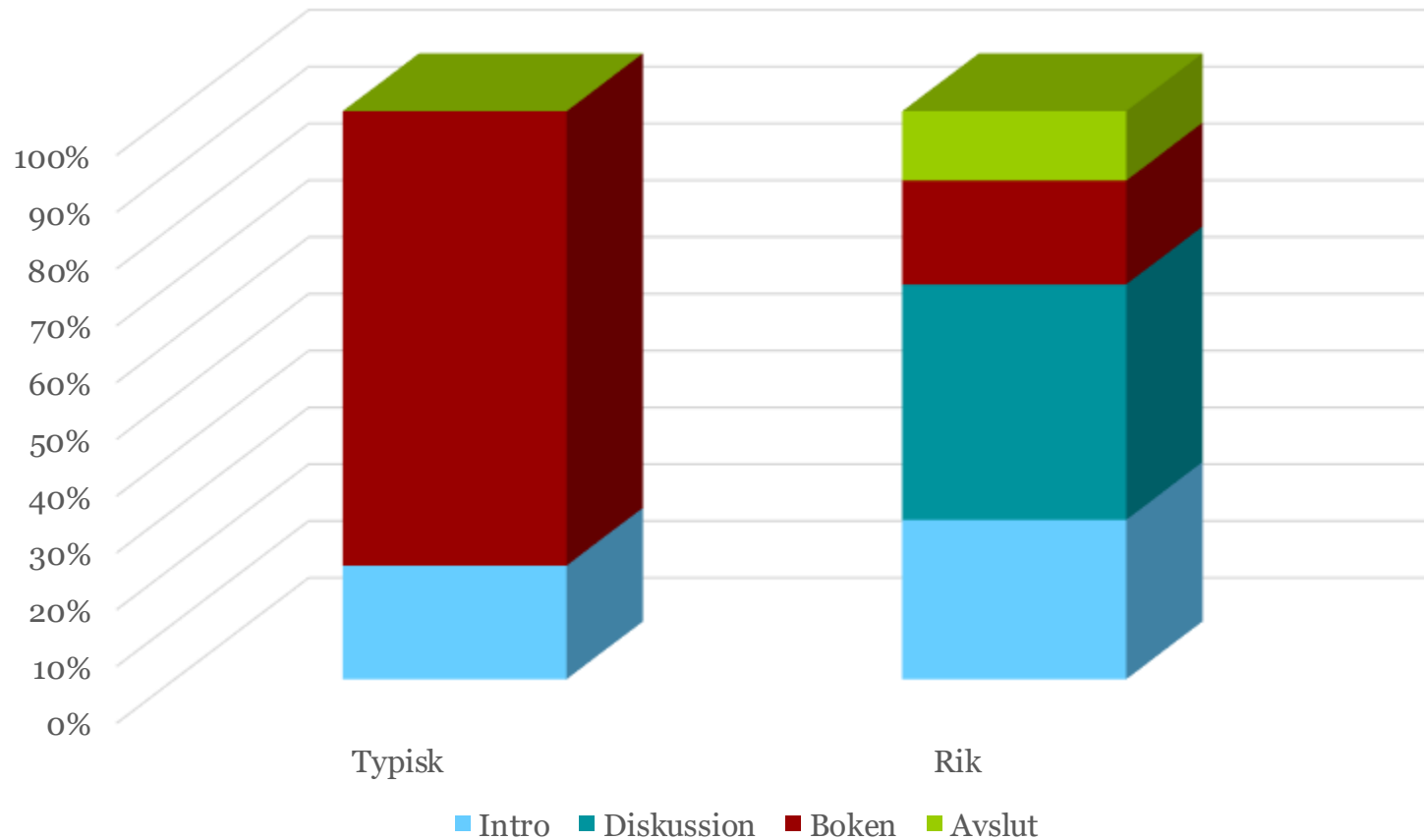
KLASSRUMSORGANISATION

- "Time on task"
- Tydliga regler och rutiner
- Strategier för störande beteenden
- Smidiga övergångar

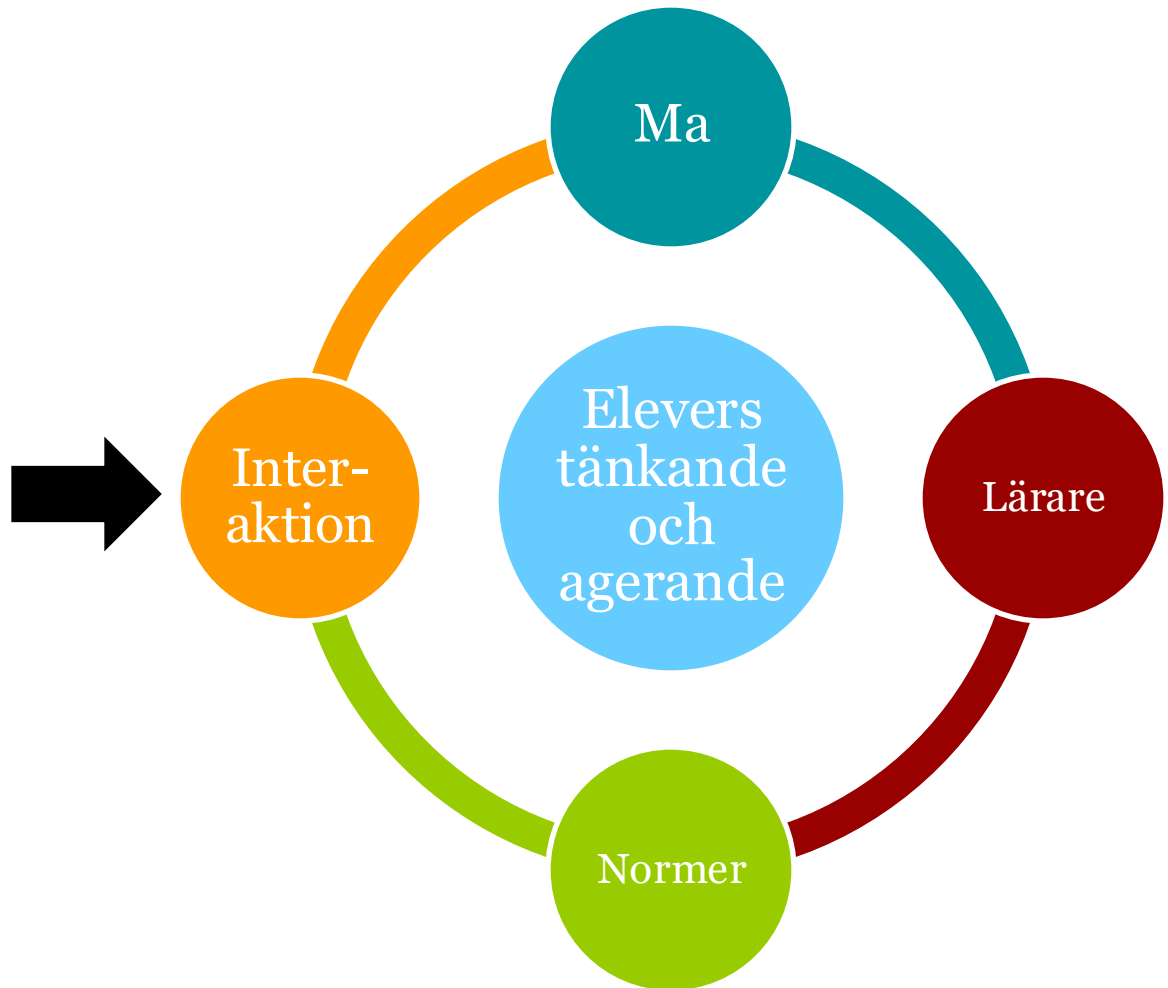
KLASSRUMSINTERAKTION

- Fokuserade och tydliga återkoppling
- Utforskande och undersökande
- Värderande av flera bidrag och perspektiv

Matematikklassrummet - Lektionsfaser



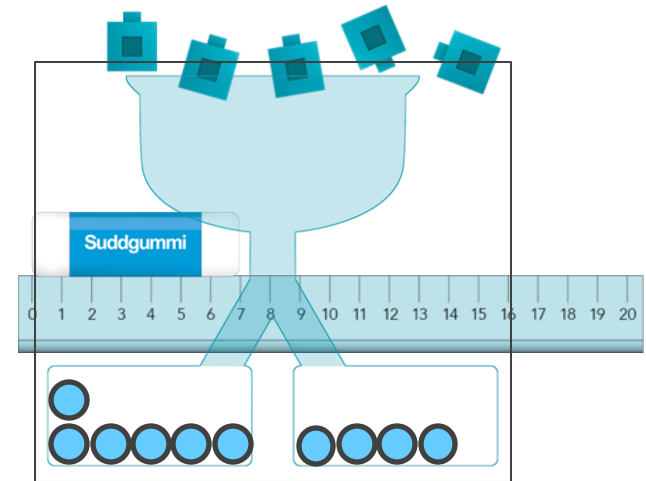
Rik matematikundervisning - komponenter



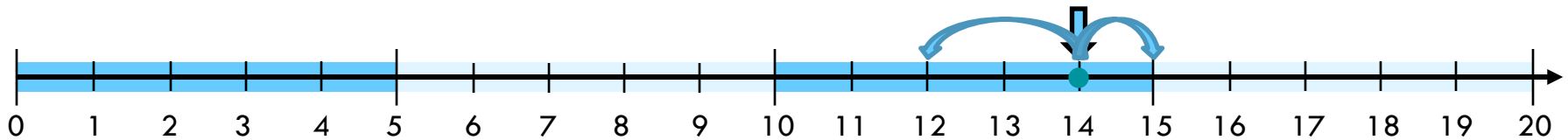
Tal (2, 7, 14,...):

- **Objekt:** tal som en samling objekt, ett antal i en grupp
- **Mäta:** tal som uppmätta enheter, t.ex. längder som kan jämföras
- **Position:** Plats på tallinje, före, efter osv
- **Konstruktion:** tal som ett konstruerat objekt, del av, består av

Lakoff & Nunez (2000)



$$10 = 6 + 4$$



$$1\,902 - 1\,897 = 5$$

Vilka räknemetoder passar?

Tänk
addition

Eftersom talen nästan är lika stora passar det bra att tänka addition: Vad adderat med 1 897 är lika med 1 902? *Uppställning* eller *Hopp på tallinjen* fungerar men tar onödigt lång tid.



Matematiska samtal och resonemang

Tre bråk hör ihop. Ett ska bort.
Vilket?

A - $2/7$

B - $13/25$

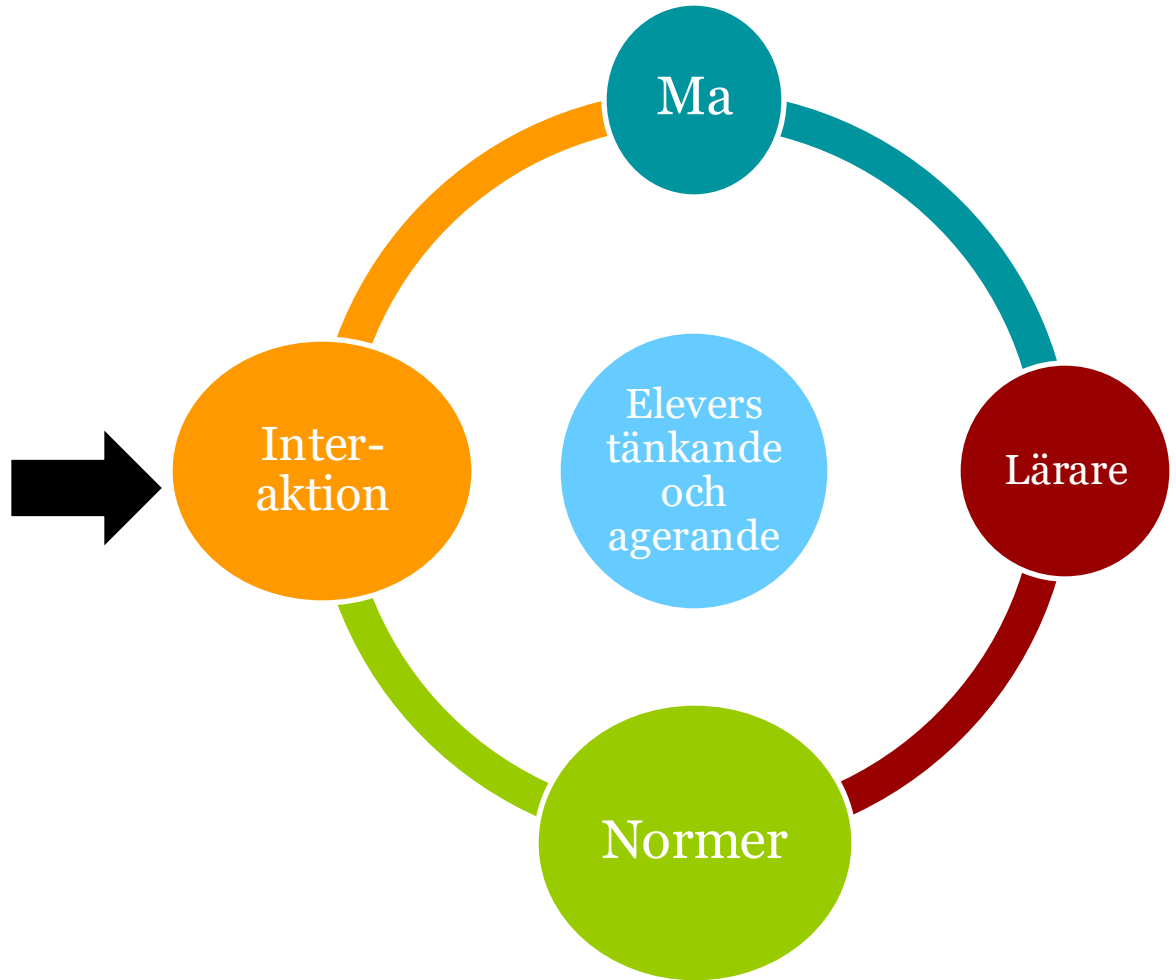
C - $4/10$

D - $1/5$

E - Jag vet inte



Rik matematikundervisning - komponenter



Klassrumsinteraktion

- Fråga-svar-utvärdering (IRE-mönster)
- Disputerande samtal
- Kumulativa samtal
- Rika utforskande samtal

Hur ser vi på elevernas bidrag och vad används dessa till?

Diskussionstyper

(Kazemi & Hintz, 2014)

	Diskussion	Syfte	Struktur
Öppen	Hitta	• Identifiera och synliggöra olika begrepp, strategier och metoder. • Skapa en ingång till en riktad och fördjupad diskussion. • Identifiera vanliga missförstånd eller svårigheter i klassen.	Läraren låter eleven/elever/grupper redovisa en eller flera lösningar och använder lärartaktiker och frågor för att få eleverna att klargöra hur de har löst uppgiften/problemet, vilka strategier de har använt och vad logiken i respektive lösning är.
Fokuserad	Jämför och koppla ihop	• Jämföra likheter och skillnader mellan exempelvis strategier, begrepp, metoder, representationer och förklaringar.	Läraren fokuserar på två till tre olika lösningar och använder samtalsmetoder och frågor för att få eleverna att identifiera likheter och skillnader mellan dessa i fråga om strategi, begrepp, metod eller representationsform.
	Varför?	• Låta klassen utveckla logiska argument för <i>varför</i> det är eller inte är på ett visst sätt: en viss matematisk idé gäller/gäller inte och <i>varför</i>, en viss strategi fungerar/fungerar inte och <i>varför</i>, etc.	Läraren ställer klassen inför ett påstående eller visar en elevlösning och använder lärartaktiker och frågor för att få eleverna att avgöra om det stämmer eller inte och <i>varför</i> utifrån logiska argument.
	Vad är bäst och varför?	• Avgöra vilken strategi eller metod som är bäst i ett visst sammanhang.	Läraren lyfter två eller flera strategier eller metoder och använder lärartaktiker och frågor för att låta eleverna resonera sig fram till vilken av dem som är bäst i ett visst sammanhang, dvs mest effektiv eller lämplig för en viss typ av problem eller uppgift.
	Definiera och klargör	• Definiera och klargöra viktiga matematiska idéer och begrepp¹ för att få eleverna både att förstå dem och att använda dem korrekt.	Utifrån en uppgift eller ett problem eller en uppgift introducerar läraren (eller återkommer till) ett matematiskt begrepp eller idé och använder då samtalsmetoder och frågor för att få eleverna att definiera och klargöra det.
	Felsök och revidera	• Hitta felet i en strategi som korrekt använd leder till ett korrekt svar. • Undersöka och avgöra vilken av flera strategier som leder till rätt svar och/eller vilka strategier som inte fungerar, och varför. • Hantera en vanligt förekommande missuppfattning eller misstag.	Utifrån en eller flera lösningar initierar läraren en diskussion. Lärartaktiker och frågor används för att få klassen att identifiera vad som är fel och föreslå ett eller flera korrekta sätt att använda en strategi, ett begrepp eller något annat.

Rika utforskande samtal – Elevaktivt och lärarlett



Lärarrollen - Matematiken

- Aktivt delta och utmana i elevers interaktion
 - använda deras uttalande
 - betona viktiga delar av elevers diskussioner
 - Ställa utforskande snarare än utvärderande frågor
 - Be elever att beskriva, motivera, utvärdera och jämföra matematiska idéer
 - Uppmärksamma, omformulera eller utveckla elevers resonemang
 - vid lämpliga tillfällen introducera matematiska idéer
- Stödja och framhäva elevers ansvar i att bedöma rimligheten och argumentera för matematiska idéer

Lärarrollen - Normer

- Lärare *skapar möjligheter* för engagemang genom att etablera sociala normer:
 - Explicit diskutera föreställningar och normer
 - Visa och berätta om fina sätt att vara
 - Uppmärksamma önskvärda handlingar
- Normer och handlingar kan vara:
 - Våga ifrågasätta eller ge ofullständiga förslag
 - Aktivt lyssna och tala tydligt
 - Aktivt deltagande och alla tänker
 - Alla åsikter är viktiga och vi utmanar respektfullt och nyfiket

Lärares kärnaktiviteter

- Leda diskussioner
- Förklara matematiskt innehåll
- Lyfta fram och tolka elevers tänkande
- Notera mönster i elevers tänkande
- Etablera normer och förväntningar
- Leda undervisning och skapa rutiner
- Sätta lärandemål
- Designa sekvenser av lektioner
- Bedöma elevers förståelse
- Konstruera bedömningsmaterial
- Ge adekvat feedback
- Ordna och stödja grupperarbete
- Skapa relationer

Ställa frågor

3	Utforska matematiska betydelser och samband	Pekar på underliggande matematiska samband och betydelser. Gör kopplingar mellan matematiska idéer och representationer.	Var finns det här x:et i grafen? Vad betyder sannolikhet?
4	Få elever att förklara sina tankar	Klargör elevers tankar. Ger elever möjlighet att arbeta igenom sina tankar för sin egen och klassens skull.	Hur fick du det till tio? Kan du förklara hur du tänkte?
5	Skapa diskussion	Möjliggör för andra i klassen/gruppen att bidra och kommentera idéer som diskuteras.	Finns det andra åsikter om detta? Vad sa du, Ella?

Undervisningsdrag

(Smith och Stein; Kilhamn et al,..)

	Grepp	Funktion	Exempel
1	Upprepa och återge	Skapa fokus på diskussionen Säkerställa att alla har möjlighet att höra Formulera tankar på ett klart sätt både för den som sa det och för övriga	Ett tal kan ses både som en sträcka och en punkt på tallinjen.
2	Be elever återge andras resonemang	Fokusera diskussion Markera att det är viktigt Skapa delaktighet	Kan du Leo återge vad Nora sa
3	Be elever jämföra sätt att resonera	Träna på att förklara, lyssna och jämföra olika sätt att resonera.	Jämför era sätt att tänka, Leo och Nora
4	Engagera fler elever i diskussionen	Skapa engagemang Introducera flera tankesätt	Leo, hur gjorde du?
5	Väntetid	Ge möjlighet till tänkande Skapa normer att det är viktigt och riktigt att tänka i ett matematikklassrum	Är det alltid så att ordningen inte spelar roll....?
6	Surra	Skapa idéer och pröva tankar med kompis	Diskutera med er bordsgranne i en halv minut

Forskningsbaserad skolutveckling för rik matematikundervisning

*System av
resurser för
undervisning*



Lärare

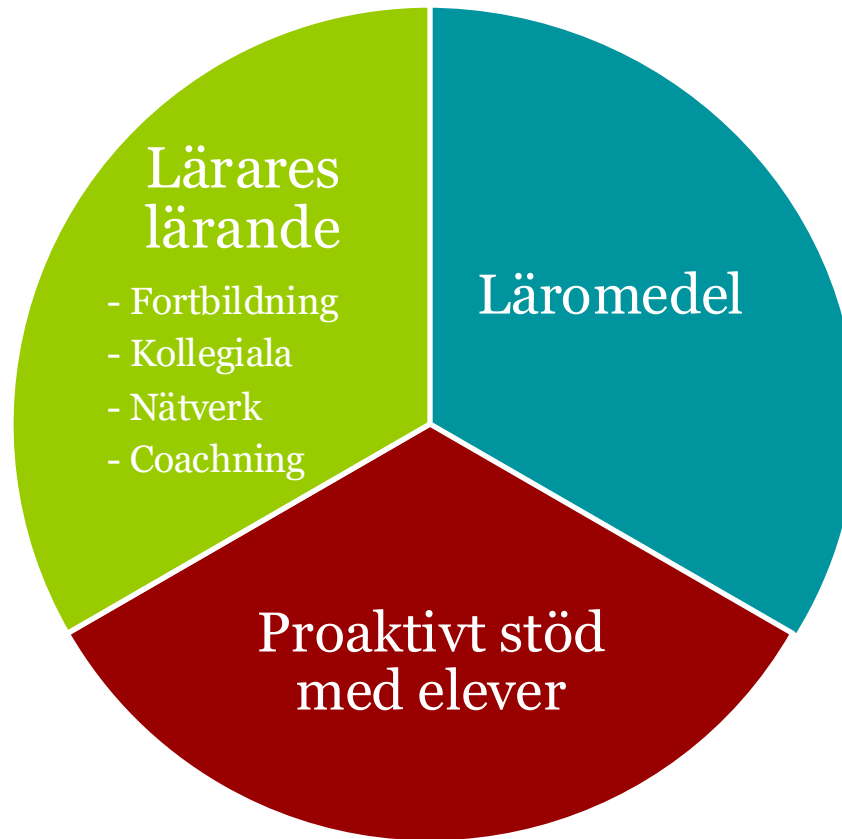


Klassrum

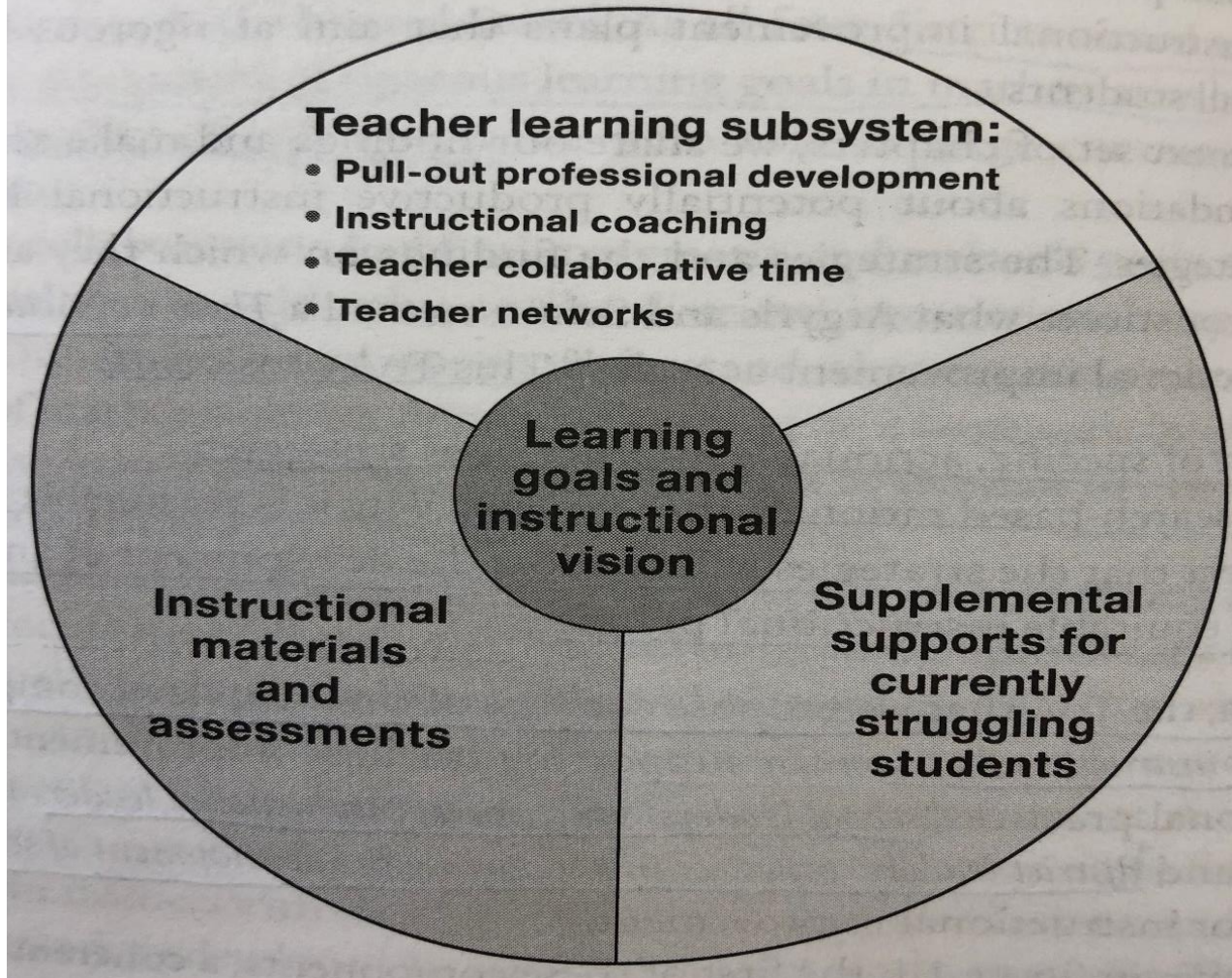


Elever

System för undervisningsutveckling (Cobb et al., 2018)



1.1 The coherent instructional system

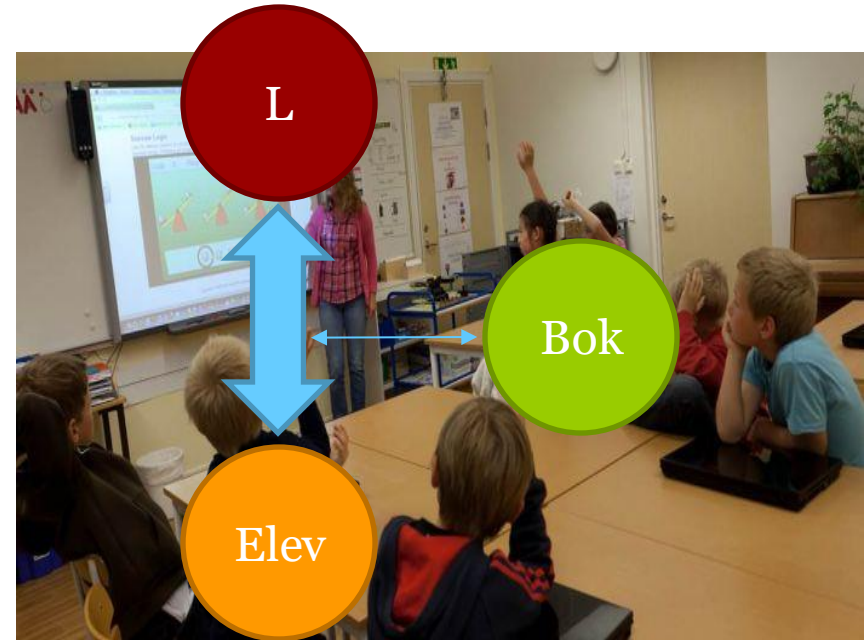
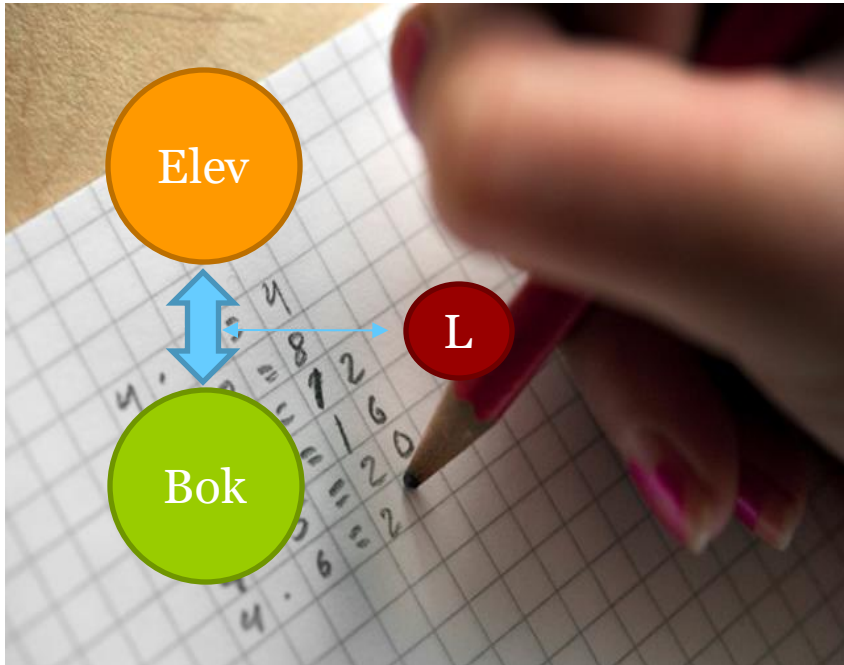


Strategier för att bygga system

1. **Kompetensutveckling** för lärare, förstelärare,...
2. **Rutiner** för systematiskt kvalitetsarbete, uppstart av lektioner, räknestugor osv
3. **Positioner** och uppdrag för analys av data, leda utvecklingsarbete, stödja elever med svårigheter...
4. **Verktyg** som läromedel, diagnoser, ramverk, test,...

Cobb och Jackson (2012), Ryve och Hemmi (2019),
Ryve och Cobb (2023)

Från räknebok till lärarresurs



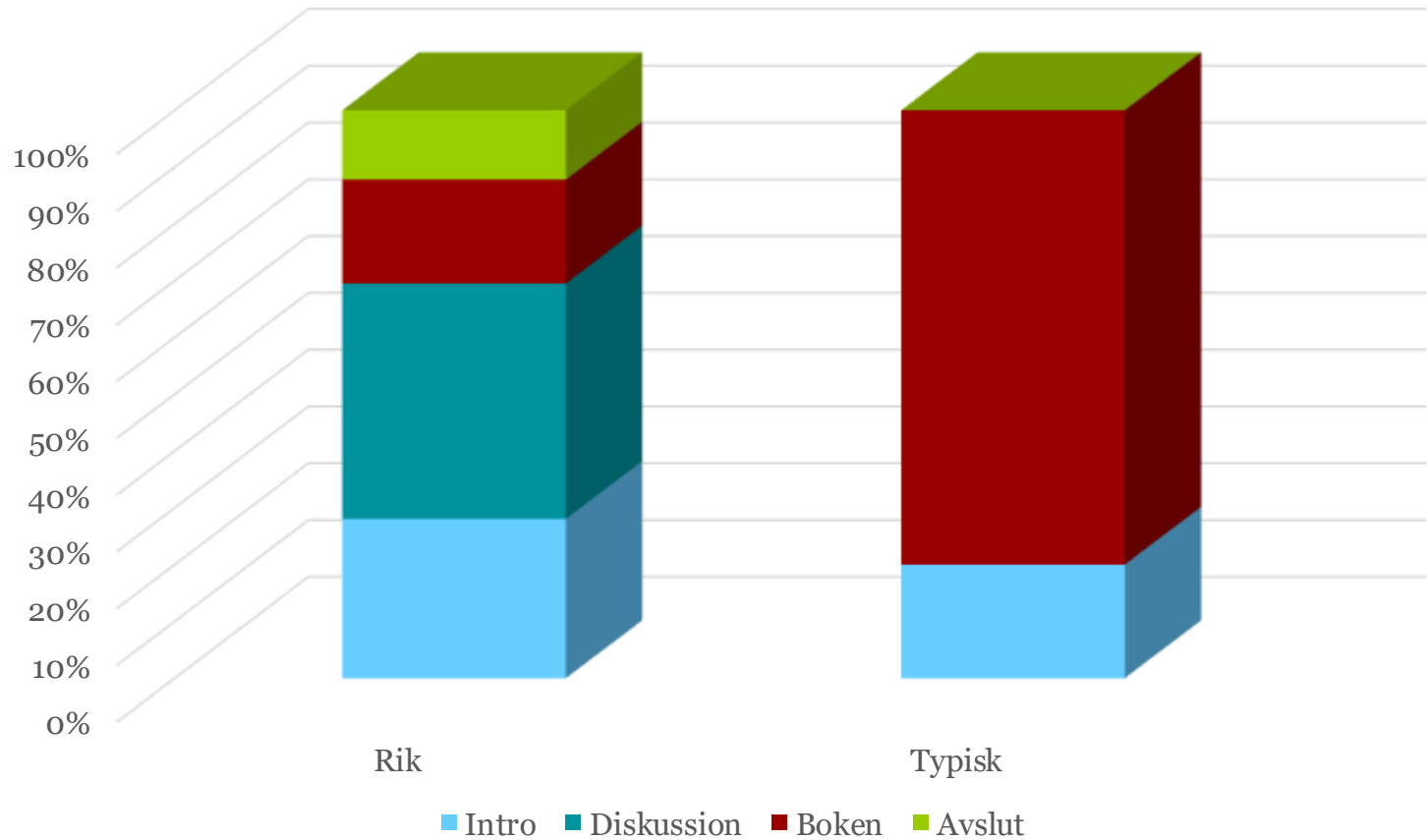
”The good teacher doctrine”... (Remillard, 2016)

- Märklig idé om att ”bra” lärare skapar sina lektioner utan att behöva använda läromedel
- Alternativ syn; Betrakta läromedel och lärare som två parter i ett samarbete
- Notera, läromedel mycket fokuserade på resurs för lärare, snarare än bara räknebok för elever!

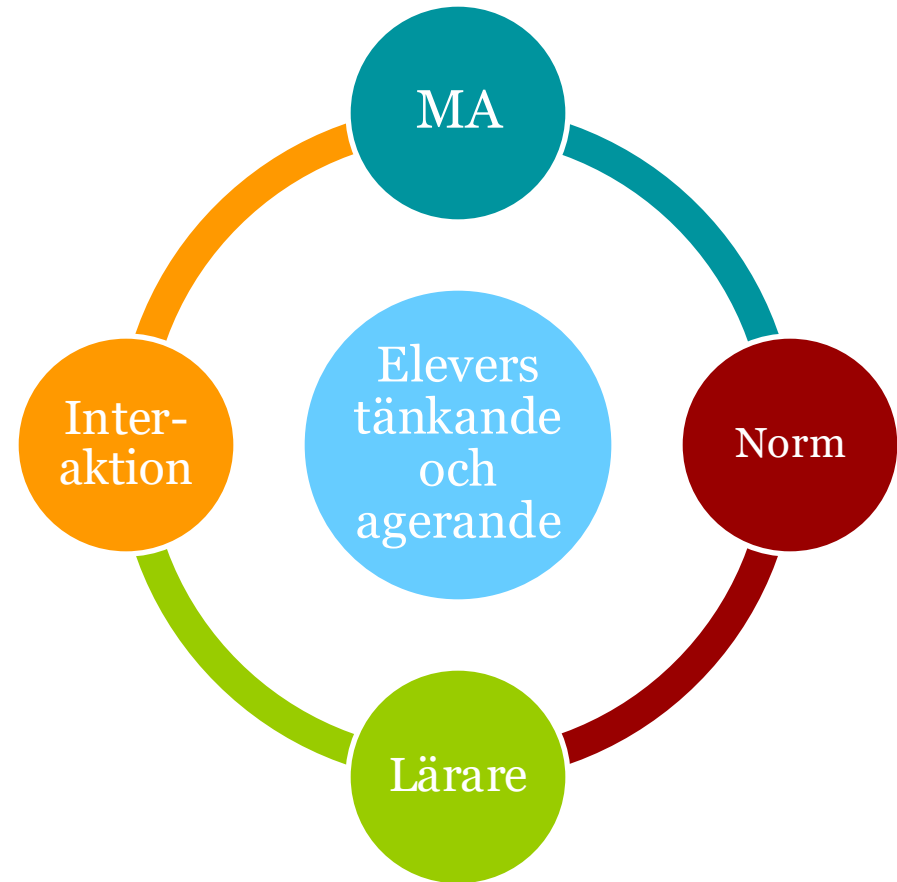
Lärarhandledning

- Instruktiv för lärare
 - Matematiska uppgifter, bildspel, gruppövningar, avslutslappar, tips på frågor att ställa i helklassdiskussioner osv.
- Kompetensutvecklande för lärare
 - Inbyggt kompetensutveckling i lärarhandledning för att vidga och fördjupa lärarens kunskaper
 - Genererar bra data för systematiskt kvalitetsarbete

Matematikklassrummet



Forskningbaserade läromedel för rik undervisning



Läromedel för rik undervisning och storskalig skolutveckling

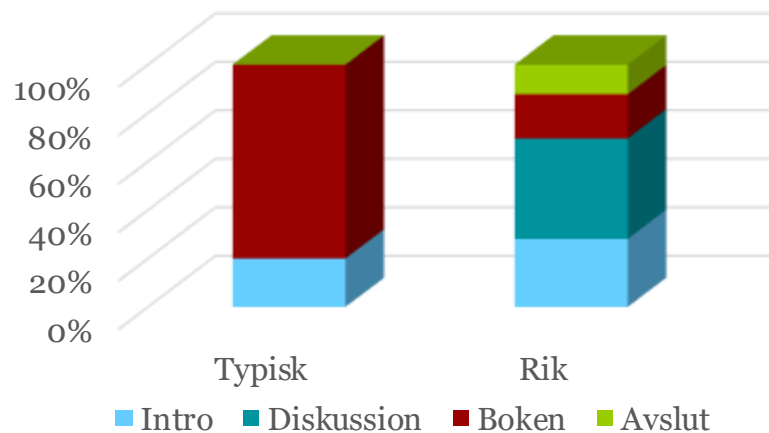
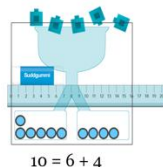
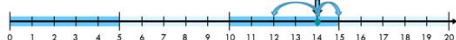
1. Över 100 forskningsbaserade lektioner per läsår.
2. Utifrån uppgifter, bildspel, visualiseringar osv, etablera djup begreppsförståelse, resonemangsförmåga och problemlösning.
3. Etablera normer i klassrummet som möjliggör lugn och strukturerad undervisning.
4. Guida läraren i sätt att interagera, ställa frågor, utmana, förklara, leda, och utvärdera elevers tänkande
5. Kompetensutveckling, kollegialt lärande och systematisk kvalitetsutveckling.

Summaring

Tal (2, 7, 14,...):

- **Objekt:** tal som en samling objekt, ett antal i en grupp
- **Måta:** tal som uppmätta enheter, t.ex. längder som kan jämföras
- **Position:** Plats på tallinje, före, efter osv
- **Konstruktion:** tal som ett konstruerat objekt, del av, består av

Lakoff & Nunez (2000)



1.1 The coherent instructional system

