

KÄNGURU SIDAN



Inför Kängurutävlingen sker ett samarbete mellan det norska matematikcentrat i Trondheim och NCM. Samsynen på matematikundervisning i allmänhet och problemlösning i synnerhet är stor. Så även om termer och begrepp uttrycks lite olika i de norska och svenska läroplanerna är tankegångar och idéer samstämmiga. Följande text finns publicerad i Tangenten 2022:3 och presenteras här översatt och bearbetad till svenska förhållanden av Nämnarens redaktion.

Varför är detta rätt och varför är detta fel?

Resonemang och argumentation är förmågor (kjerneelement i norska läroplanen) som elever kan utveckla genom arbete med problem från Kängurutävlingen. Resonemang och argumentation kan ses som ett förhållningssätt för att utveckla matematiska bevis med en progression från informella bevis i grundskolan till en ökande grad av formell matematisk bevisföring i gymnasieskolan. Att argumentera kan fungera som ett brogge mellan informell och formell bevisföring.

I artikeln beskrivs några strategier för att arbeta med resonemang och argumentation redan på låg- och mellanstadiet.

De viktiga frågorna

Det är lätt att fråga eleverna hur de har tänkt, men hur kan vi hjälpa eleverna att utvecklas från att "bara" förklara till att resonera och argumentera för sina matematiska lösningar? Det är något eleverna måste lära sig, det kommer inte av sig självt. Barbara Jaworski hävdar att undervisning i utforskande matematik inte är en metod utan en grundläggande inställning till ämnet matematik. Detsamma gäller resonemang och argumentation när dessa förmågor ska finna sin naturliga plats i matematikundervisningen. Ett enkelt sätt att börja utveckla elevers förmåga att resonera och argumentera är att anpassa hur du ställer frågor. Istället för att be eleverna att räkna ut $11 - 4$ kan du utmana eleverna att visa *varför* $11 - 4 = 7$. När elever utmanas i större utsträckning med frågor som "Visa att ..." eller "Argumentera för att ..." kommer de att resonera mer, använda och bevisa hur matematiska idéer fungerar, menar Susan Jo Russell. Eleverna måste lära sig att fråga sig själva "Kan detta vara sant?" och "Varför stämmer det här?".

Skapa möjligheter med känguruproblem

Kängurutävlingen består av problem med fem svarsalternativ, varav de flesta lämpar sig för fortsatt arbete med resonemang och argumentation. När eleverna arbetar med problemlösning stöter de på problem som de inte känner igen sedan tidigare. De ska lösa problemen och samtidigt bedöma om lösningarna är korrekta. När de bedömer giltigheten i sina lösningar kan de utmanas att argumentera och motivera *varför* de anser att svaret är korrekt.

Många känguruproblem bygger på matematiska idéer som sätts in i sammanhang för att väcka nyfikenhet och engagemang hos eleverna. Det är inte säkert att eleverna upptäcker dessa idéer om de arbetar ensamma med problemen. Du bör därför ta vara på de möjligheter som ligger i bra problem och utnyttja tillfällen som öppnar sig direkt efter att eleverna har arbetat med ett problem. Om du tar upp problemet på ett nytt sätt i ett matematiskt samtal ger det eleverna fler möjligheter att upptäcka den matematiska idén. Samtidigt skapar det ett tillfälle att studera idén mer ingående från olika håll. Vad händer om vi sätter in andra tal i problemet? Blir lösningen densamma? Kan vi lösa problemet med samma strategier? Uppstår nya mönster? Resonemang och argumentation är nyckeln i detta arbete.

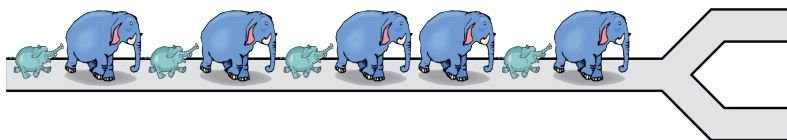
Att motbevisa

Känguruproblemen öppnar för matematiska samtal där eleverna kan utforska och utveckla sin matematiska argumentation. De fem svarsalternativen med ett rätt och fyra felaktiga svar kan du dra nytta av i undervisningen. Det mest närliggande är att hitta och argumentera för rätt lösning på ett givet problem. Detta är naturligtvis den starkaste triggern för eleverna när de löser problem, men jag skulle rekommendera att du tar vara på de möjligheter som svarsalternativen ger. En viktig aspekt inom arbetet med matematiska bevis är att motbevisa. Denna aspekt måste också uppmärksammas i undervisningen, på samma sätt som att bevisa.

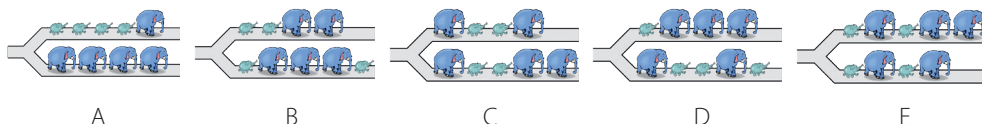
Flera av problemen i Kängurutävlingen inbjuder till olika sätt att resonera sig fram till rätt svarsalternativ. Att eliminera svarsalternativ som inte kan vara korrekta är en effektiv strategi. En sådan elimineringsstrategi handlar

Fem stora och fyra små elefanter promenerar på en väg.

När vägen delar sig går varje elefant antingen till höger eller till vänster.



Vilken av följande bilder visar en situation som *inte* kan uppstå när alla har passerat vägskelet?



Problem 9, Benjamin 2022

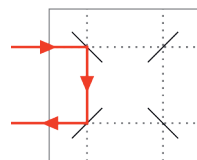
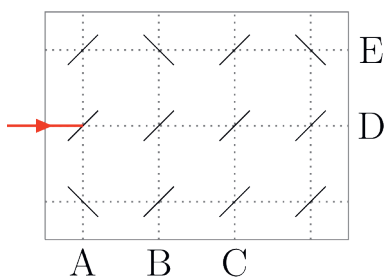
om att *motbevisa*. Att undersöka *varför* ett svarsalternativ kanske inte är korrekt ger eleverna möjligheter att studera den matematiska idén ur ett nytt perspektiv. Därför kommer elimineringsmetoden i lämpliga uppgifter att ge eleverna goda möjligheter att också argumentera *för* ett korrekt svarsalternativ. Genom att uppmantra eleverna att hitta ett svarsalternativ som inte kan vara det rätta, kommer de samtidigt att utmanas att sätta ord på varför. Det kan stödja dem när de senare utvecklar matematiska argument för eller emot matematiska påståenden.

I problemet med de nio elefanterna ska eleverna utifrån huvudbilden hitta ett alternativ som *inte* kan uppstå efter ett vägså. Att eliminera svarsalternativ kan vara en lämplig strategi, där resonemanget bakom elimineringarna kan hjälpa eleverna att förstå varför C är det rätta svarsalternativet. Eleverna kan använda konkret material för att modellera handlingen i uppgiften eller utföra den fysiskt. Eleverna kan komma fram till rätt svarsalternativ, till exempel genom försök och misstag, utan att nödvändigtvis behöva förstå varför det måste vara så här. Om man följer upp med frågan: "Argumentera för varför svarsalternativ A inte kan stämma" kommer eleverna att i större utsträckning utmanas att motivera och visa förståelse för varför C måste vara korrekt. De måste sätta ord på vad de har fått reda på och varför det är matematiskt korrekt. I problemet med elefanterna kommer det att vara viktigt att bygga upp ett argument kring den lilla elefantens position längst bak i ledet. Att visa att positionen måste innebära att samma elefant också måste stå längst bak på en av de nya vägarna efter vägsåket blir ett viktigt argument.

Övertyga en vän

Det finns olika pedagogiska grepp för att resonemang och argumentation ska bli en naturlig del i matematikundervisningen. Baserat på tidigare forskning har Jo Boaler och Cathy Humpfreys beskrivit olika faser i utvecklingen av bevisföring. På alla stadier kan det vara ett förnuftigt drag *att övertyga en vän*. Ett argument som en elev ger en klasskompis är ofta av sådan karaktär att kompisen blir övertygad och förstår varför svarsalternativet är det rätta även om det inte är ett matematiskt stringent argument. För att kunna göra detta behöver eleven först ha övertygat sig själv om varför det valda svarsalternativet

En laserstråle reflekteras i en spegel så som bilden till höger visar.



Vilken bokstav kommer den här laserstrålen att nå fram till?

A B C D E

Problem 3, Benjamin 2022

måste vara det korrekta. Att övertyga en kompis är ett relativt enkelt drag, där klasskompisarna kan ställa följdfrågor längs vägen så att eleven kan omformulera eller finjustera sin matematiska argumentation. Att övertyga en vän kommer med tiden att hjälpa eleverna att i större utsträckning dra nytta av argumentationen i arbetet som leder till mer formell bevisföring.

Problemet med laserstrålen som reflekteras i en spegel har en låg ingångströskel för att arbeta med strategin att övertyga en vän. Eleverna måste argumentera för hur laserstrålens riktning kommer att röra sig genom sammansättningen av speglar. Att rita förändringarna i laserstrålen kan stödja elevens argument och deras motiv för att välja ett visst svarsalternativ.

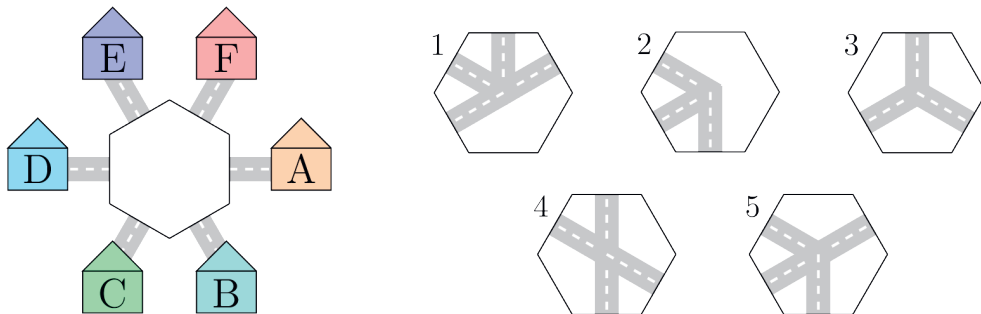
Ritandet kan också stödja kompisarna att utmana argument som inte är tillräckligt övertygande eller att bilda motargument om de inte håller med om resonemanget och lösningen. När eleverna börjar bemästra att övertyga en vän kan vännen öka motståndet mot att bli övertalad. Ett ökande motstånd kommer att kräva mer grundliga resonemang för att kunna forma mer precisa argument. På så sätt måste eleverna hela tiden finjustera sina argument. I laserstråleproblemet kan finjusteringen vara att de använder matematiska termer i argumentationen. Det kan finnas en övergång från att använda fingerpekning och enkel kommunikation, till att endast använda verbal förklaring med matematiska begrepp. Ett exempel på formulering kan vara: "Laserstrålen kommer in från vänster. I den första spegeln speglas laserstrålen i 90° och skickas uppåt. När den möter nästa spegel bryts strålen 90° och skickas till höger ...".

Allt eftersom eleverna skaffar sig rika erfarenheter av att argumentera för och emot matematiska påståenden, kan de behöva möta ett större motstånd från kamraterna. Istället för att *övertyga en vän* kan eleverna utmanas att *övertyga en skeptiker*. Denne skeptiker kan fortfarande vara en klasskompis som är mer tränad i matematiska resonemang. Det kan också vara en lärare som är skeptikern. Att övertyga en skeptiker höjer nivån på matematisk argumentation, både för den som argumenterar och för skeptikern. Det ger en naturlig progression i arbetet med resonemang och argumentation, där eleverna i allt högre grad får finlipa sina matematiska argument. I ett längre perspektiv, med allt starkare krav på matematisk stringens i argumenten, kan nästa steg vara att *övertyga en akademiskt stark person*. Här kan matematikläraren, eller eventuellt en elev från en högre årskurs, ta denna roll.

Ändra premisser i problemen

Ett annat pedagogiskt drag är att låta eleverna arbeta i par eller grupper om tre, där de tilldelas var sitt svarsalternativ. Paren eller grupperna måste komma överens om argument för varför svarsalternativet de tilldelats är det korrekta eller inte. Du kan utmana eleverna som har felaktiga svarsalternativ att argumentera för vilka premisser i uppgiften som måste ändras så att deras svarsalternativ blir det rätta. I det föregående exemplet med laserstrålen kan premissförändringarna vara att ändra vinkeln på spegelytorna så att laserstrålen träffar deras svarsalternativ. Eleverna kan vidare utmanas att göra så få förändringar som möjligt och att argumentera för att färre förändringar inte kan göras än vad de har kommit fram till.

Alma ska lägga en bit i mitten så att det går att resa från A till B och till E. Men det ska *inte* gå att resa från A till D. Hon kan vrida på bitarna.



Vilka två bitar kan hon använda?

A: 1 och 2 B: 2 och 3 C: 1 och 4 D: 4 och 5 E: 1 och 5

Problem 21, Ecolier 2022

I problemet ovan ska eleverna hitta de två bitar som Alma kan placera så att premisserna uppfylls. I likhet med laserstråleproblemet kan eleverna även här få ett eget svarsalternativ och sedan utmanas att argumentera för vilka premisser i problemtexten de måste ändra så att deras bitar ger rätt svar.

Att be eleverna formulera de nya premisserna kan främja ett behov av att finjustera argumenten så att premisserna blir precisa. En annan möjlighet är att göra ändringar i bitarna. Eleverna kan antingen undersöka vilken bit som behöver minst förändringar för att deras svarsalternativ ska bli rätt eller ta utgångspunkt i den bit de har fått och argumentera för vilka förändringar som behövs. Kommer det att räcka med att flytta en del av vägen på biten eller kommer det att krävas stora förändringar?

De exempel jag har använt visar hur känguruproblem kan användas på olika sätt i arbetet med resonemang och argumentation. Genom att utnyttja den potential som ligger i många av problemen kommer eleverna att kunna upptäcka och utforska den matematiska idén ur flera olika perspektiv på ett grundligt sätt med enkla steg.

Stian Tømmerdal

LITTERATUR

- Boaler, J. & Humphreys, C. (2005). *Connecting mathematical ideas: Middle school video cases to support teaching and learning (No. 1)*. Heinemann.
- Jaworski, B. (2010). Collaborative inquiry in developing mathematics teaching in Norway. I B. Sriraman m fl (red), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (s 71–90): Information Age Publishing.
- Russel, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. I L. Stiff (red), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K–12*. 1999 NTCM Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

För svenska läsare finns känguruproblem från över 20 års tävlingar att hitta på ncm.gu.se/kanguru.