Éva Fülöp

Varför kombinatorik i skolan?

Vad finns det för argument för att lära ut kombinatorik? Vilka uppgifter kan vara lämpliga när läraren vill arbeta med kombinatoriska resonemang? Här diskuteras möjligheter till utveckling av kombinatoriskt tänkande och hur man kan skapa progression från årskurs 1 till 9.

Sannolikhetslära handlar bland annat om att kunna svara på frågan om *på hur många olika sätt* en viss händelse kan inträffa. Forskning visar att många missuppfattningar kring sannolikhet beror på bristande kombinatoriska resonemang. Det pekar på vikten av en tydlig och systematisk övergång från kombinatorik till sannolikhetslära. Kombinatorik är den gren av matematiken som handlar om att bestämma antalet möjligheter som ett antal givna objekt med vissa egenskaper kan kombineras. Med matematisk terminologi innebär det att välja ut och ordna element i en mängd.

I kombinatorik kombineras objekt eller egenskaper, eller alternativa handlingsmöjligheter. Dessa kan kallas variabler, men en annan term som används för att innefatta så många olika kategorier är att prata om *element*, ett ord hämtat från mängdläran. När ett kombinatorikproblem tolkas måste problemlösaren kunna fastställa svar på följande frågor:

- Hur många givna element finns det?
- Är alla element olika, eller finns det några som är samma?
- Kan samma element användas upprepade gånger?
- Vilka andra förutsättningar eller villkor finns?

Kombinatorik i läroplanen

Kombinatoriken finns inskriven i den nuvarande kursplan för årskurs 4–6 (enkel kombinatorik) och årskurs 7–9 (kombinatoriska principer i olika situationer). Men kombinatorik finns även på lågstadiet, där alla frågor som handlar om att studera slumpmässiga händelser i konkreta situationer kan uppfattas och behandlas som kombinatoriska frågor. Unga elever kan använda laborativt material för att bestämma antalet sätt en händelse inträffade. Även om man i årskurs 1 och 2 kan nöja sig med en uppräkning av några kombinatoriska alternativ bör man sträva efter att skriva ner lösningarna på ett tydligt och strukturerat sätt och muntligt diskutera grundläggande lösningsidéer. Målet är att eleverna så småningom ska kunna hitta alla möjliga kombinationer.

En väsentlig förutsättning för undervisning om kombinatorik är att läraren själv kan lösa uppgiften, inte bara genom att testa sig fram utan även på djupet förstå de matematiska modeller som kan användas för att vara säker på att man har hittat alla möjligheter.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmågan att analysera och lösa problem med hjälp av matematik och att föra och följa matematiska resonemang. Genom kombinatoriska aktiviteter utvecklar eleverna också sin förmåga att göra beräkningar, att komma med strategiska gissningar och att generalisera. Framförallt ges de möjlighet att utveckla ett systematiskt tänkande som kan vara en viktig kunskap när de senare arbetar med statistik eller lär sig att lösa ekvationer.

Det är välkänt att de flesta kombinatoriska problem inte kan lösas helt instrumentellt. De kräver kritiskt tänkande, vilket aktiverar strategisk planering och metakognitiva förmåga, vilket i sin tur resulterar i förbättrad problemlösningsförmåga även i andra sammanhang.

Kombinatorik för konstruktivt tänkande

En av matematikundervisningens viktigaste uppgifter är att utveckla elevernas konstruktiva tänkande och förmåga att skapa matematiska modeller. Det finns enligt forskningen sju utvecklingssteg som kan följas i undervisning om kombinatorik i grundskolan.

1. Utveckling av systematiseringsförmågan.
2. Upptäckten av strategier för att räkna ihop antalet fall.
3. Upptäckten av matematiska modeller.
4. Kritisk granskning av vad som händer när modellen inte fungerar.
5. Användning av objektrepresentationer (konkreta representationer).
6. Användning av visuella representationer.
7. Användning av kombinatoriskt tänkande i nya sammanhang, till exempel på geometriska problem.

I den här artikeln beskriver jag två matematiska modeller som kan användas för att lösa många kombinatoriska problem. Tanken är att belysa några egenskaper som ligger bakom många av problemen i lägre årskurser, och genom dem lyfta fram de vanliga matematiska idéerna. För varje uppgift beskriver jag dessutom en progression genom grundskolans olika stadier, där jag visar hur samma uppgift och samma matematiska idé kan lyftas till ett alltmer generellt resonemang.

Multiplikationsprincipen

Jag börjar med att presentera två uppgifter som till det yttre kan se helt olika ut: ett problem med Cuisenairestavar och ett med en spindel som kryper på en kub. Problemen kan man arbeta med var för sig, men de matematiska idéerna bakom upptäcks bäst om lösningarna sedan jämförs och eleverna får chans att uppmärksamma analogin mellan de två problemen. Det hjälper mycket om man ritar träddiagram för båda uppgifterna, som (trots den skenbara skillnaden) kommer att vara helt lika. Det är två olika kontexter som kan illustreras med samma matematisk modell.

Problem 1 – Cuisenairestavar

Cuisenairestavar är små avlånga klossar i olika färger där varje längd har en viss färg. Stavarna är ett vanligt förekommande laborativt material på låg- och mellanstadiet. Stavarna saknar gradering vilket gör att de kan användas till att representera olika mått och enheter. Cuisenairestavar kan exempelvis användas för att visuellt illustrera de fyra räknesätten, bråk eller grundläggande principer för mätning. Stavarna är mellan 1 cm och 10 cm långa och säljs i flerpack.

> Utgå från den längsta staven som är orange. Plocka fram de stavar som är gula, ljusgröna och röda. Lägg dessa i kombinationer så att varje rad blir lika lång som den orangea och innehåller en stav av varje färg. På hur många sätt kan det göras? Hitta alla alternativ!

Klassaktivitet

I klassrummet kan det vara lämpligt att läraren delar upp klassen i grupper, till exempel tre elever i varje grupp där en är sekreterare och två testar olika alternativ. Varje grupp arbetar med problemet och bokför sina kombinationer under en viss bestämd tid. Sedan sammanställs allas resultat på tavlan genom att kombinationerna skrivs upp. En helklassdiskussion följer utifrån frågorna:

- Har vi fått fram alla möjliga fall?
- Hur vet vi det?

En fullständig lösning av Problem 1 med konkret representation.

Att nå en fullständig lösning

Behovet av fullständighet utvecklas inte nödvändigtvis hos barn på egen hand. En lärare kan behövas för att ta upp frågan: finns det ytterligare ett fall eller inte? Hur kan eleverna se om de har lyckats hitta alla möjliga fall eller inte, och om inte vilka som saknas? Lösningen och helklassdikussionen kan se olika ut för elever på låg-, mellan- eller högstadiet, och även för elever i samma årskurs som befinner sig på olika utvecklingssteg i kombinatoriskt tänkande. Hur kan progressionen se ut?

Stortera och strukturera

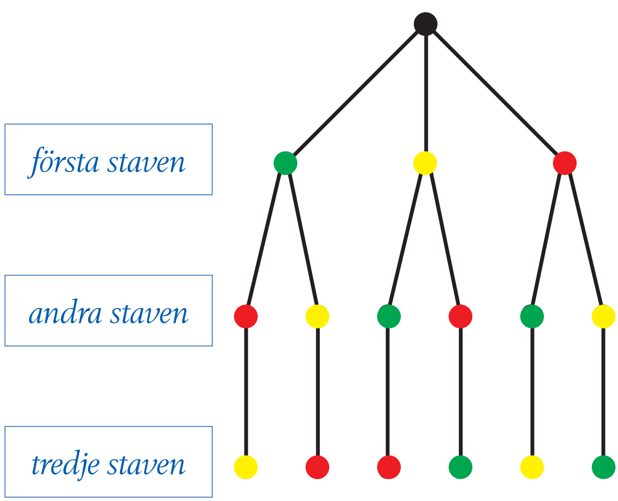
På lågstadiet kan lösningen vara att sortera data och beskriva resultat från undersökningar genom att göra en tabell, diskutera stavarnas ordning och position och identifiera ekvivalenta fall, det vill säga de kombinationer som kan betraktas som samma. Det handlar om att lista alla möjliga fall, sedan sortera och strukturera de hittade fallen och upptäcka vad som saknas. Antingen kan man först skapa en lista och sedan leta efter ett system, eller så kan man bygga ett system "i förväg" för att utifrån det hitta alla möjliga fall som uppfyller de givna villkoren.

Vänster	Mitten	Höger
grön	röd	gul
grön	gul	röd
gul	grön	röd
gul	röd	görn
röd	grön	gul
röd	gul	grön

En fullständig lösning av Problem 1 med en tabell (visuell representation).

Träddiagram

På mellanstadiet kan lösningen vara att göra ett träddiagram och genom det bestämma antalet möjliga fall. Det handlar om en medveten identifiering av de tre val som görs i uppgiften. Helklassdiskussionen handlar om att upptäcka regelbundenheter genom att observera, karakterisera och notera förändringen av antalet observerade fall. När man känner igen strukturen för ett aktuellt problem har man redan tagit ett stort steg mot generalisering.



Träddiagram över de tre valen som görs i Problem 1 (visuell representation).

Multiplikationsprincipen formuleras

På högstadiet kan lösningen vara att använda multiplikationsprincipen för att beräkna antalet möjliga fall. Det är då lämpligt att utgå från träddiagrammet för att förstå den matematiska idén bakom principen.

> Används multiplikationsprincipen får vi: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Faktorerna i multiplikationen ges av antal möjliga val i varje steg i träddiagrammet. Helklassdiskussionen handlar om att generalisera principen:

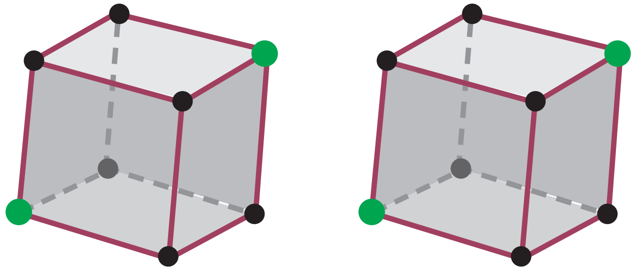
> Låt oss anta att vi kan välja första staven på m sätt och andra staven på n sätt, då kan de två valen efter varandra göras på $m \cdot n$ sätt.

Skapa en analog uppgift

Att kunna skapa en ny uppgift med exakt samma struktur (en analog uppgift) är ytterligare ett steg i utvecklingen av kombinatoriskt tänkande. Börja då med att identifiera de grundläggande villkoren. I vårt fall är villkoret att det finns tre element och att varje element får användas exakt en gång i varje rad. Hitta därefter på en ny kontext som har samma grundläggande villkor. Problem 2 är ett sådant exempel.

Problem 2 – Spindelns väg

> En spindel förflyttar sig från kubens ena hörn till kubens motsatta hörn genom att röra sig längs kanterna på kuben. Spindeln kan bara röra sig framåt, inte vända tillbaka, och vill gå så kort sträcka som möjligt. Rita de olika möjliga vägarna i bilden!
>
> Hur många olika vägar kan spindeln ta?



Den kortaste vägen innebär att det görs tre val (spindeln går längst tre kanter) på vägen från det nedre vänstra hörnet till kubens motsatta hörn, det vill säga det översta högra hörnet. I det första valet kan spindeln ta en av tre vägar, därefter en av två (eftersom den inte vänder om) och i sista valet vill spindeln alltid den kortaste vägen och har därför bara en möjlighet. Det innebär att vi kan använda samma matematiska modell som i Cuisinaireproblemet.

Det hjälper mycket om man ritar ett träddiagram, som trots den skenbara skillnaden kommer att vara helt likt träddiagrammet i Problem 1. Det är två olika kontexter som kan illustreras med samma matematiska modell.

Utmaning: Problem 3 – Kortlek med katter

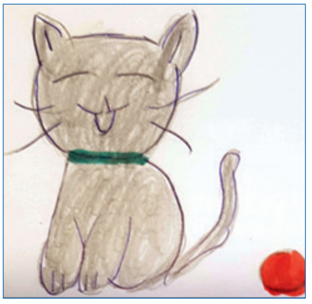
När man känner igen strukturen för ett aktuellt problem har man redan tagit ett stort steg mot generalisering. Nästa steg kan vara att skapa ytterligare ett problem med samma struktur men med variationer när det gäller antal objekt (element). Problem 3 blir ett steg till generalisering av resonemangen i Problem 1 och 2.

Sara och Viktor bestämde sig för att göra ett eget kortspel med bilder av sina två katter: Iris, den bruna katten och Sinus, den vita katten. De utformar korten på följande sätt:

- På varje kort finns det en katt, antingen Iris, den bruna katten eller Sinus, den vita katten.
- Katten har antingen en boll eller så har den inte någon boll. Färgen på bollen kan vara blå eller röd.
- Katten har antingen halsband eller så har den inte halsband. Färgen på halsbandet kan vara röd eller grön.

Sara och Viktor gör många kort så att de till slut har kort med alla möjliga kombinationer. Här är några exempel:





a. Hur många kort finns det där en katt (antingen Iris eller Sinus) sitter utan halsband och utan boll?
b. Hur många kort finns det där Iris (den bruna katten) sitter utan halsband bredvid en boll?
c. Hur många kort finns det med en röd boll?
d. Hur många kort har de tillverkat totalt?

Problem 4 – Byxorna

Vad händer när modellen inte fungerar? Titta på nästa problem och fundera på vad som skiljer det från Problem 1 och 2.

På hur många sätt kan du läsa ordet BYXORNA om du bara får läsa åt höger och neråt i tabellen?

Hitta alla alternativ!

B	Y	X	O
Y	X	O	R
X	O	R	N
O	R	N	A

Additionsprincipen

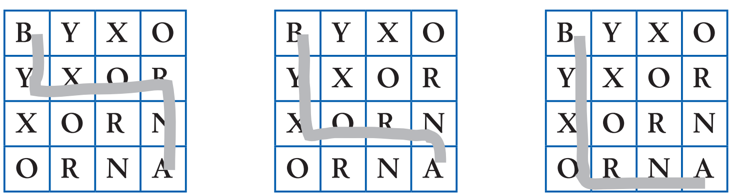
Frågan *På hur många sätt?* känner vi igen från de tidigare problemen, men i Problem 4 har vi ingen hjälp av multiplikationsprincipen och kan inte rita ett träddiagram för att hitta lösningen. De två nya problemen, Problem 4 och 5, kan man arbeta med var för sig även nu, men de matematiska idéerna bakom upptäcks bäst om lösningarna sedan jämförs och eleverna får chans att uppmärksamma likheter och skillnader mellan dem.

Klassrumsaktivitet

På lågstadiet kan det vara lämpligt att läraren delar upp klassen i par. Varje par läser uppgiften och börjar med att svara på följande frågor för att klargöra vad problemet handlar om.

- Vilket ord måste du läsa från bokstavstabellen? (BYXORNA)
- Var ska man börja? (bokstaven B)
- Var ska man sluta? (bokstaven A)
- I vilken riktning kan du röra dig när du läser? (höger eller neråt)
- Hur många steg måste du ta? (sex steg)

Den ena eleven ska sedan instruera kompisen hur hen kan röra sig i tabellen för att kunna läsa ordet BYXORNA (till exempel: Gå först neråt ett steg, sedan höger tre steg, sedan neråt två steg). Därefter byter eleverna roller och den andra eleven instruerar kompisen hur hen ska röra sig i tabellen för att kunna läsa ordet BYXORNA på ett annat sätt. Låt eleverna ha tillgång till många tabeller så att de kan färglägga de olika vägarna. Fortsätt på samma sätt tills ingen av eleverna kan komma på fler olika vägar. Exempel på lösningar:



Sortera och strukturera

En helklassdiskussion följer utifrån frågorna:

- Har vi fått fram alla möjliga fall?
- Hur vet vi det?

På lågstadiet kan lösningen handla om att lista de fall eleverna har hittat och sedan hjälpas åt att sortera dem och finna en struktur för att upptäcka saknade fall.

På mellanstadiet kan lösningen vara att göra en tabell och genom den bestämma antalet möjliga fall. Det handlar om en medveten identifiering av de val som görs i uppgiften. Helklassdiskussionen handlar om att upptäcka regelbundenheter genom att observera, karakterisera och notera förändringen av antalet observerade fall. En bra fråga på vägen kan vara: På hur många sätt kan man ta sig till en viss ruta?

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

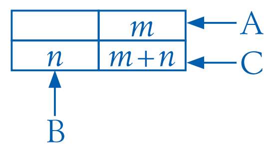
I den här tabellen finns noterat antalet sätt att ta sig till varje ruta utifrån problemets förutsättningar. Varje siffra i tabellen motsvarar antalet olika vägar man kan ta för att komma till den bokstaven som står i respektive ruta. I tabellen framträder det triangulära talmönster som kallas Pascals triangel. Svaret på frågan är att ordet BYXORNA kan läsas på 20 olika sätt.

En fullständig lösning av Problem 4 med en tabell.

Additionsprincipen formuleras

På högstadiet kan lösningen vara att använda additionsprincipen för att beräkna antalet möjliga fall. Det är då lämpligt att utgå från tabellen för att förstå den matematiska idén bakom principen. Något förenklat skapas varje tals värde av summan av de två talen i rutorna ovanför och till vänster. Helklassdiskussionen handlar om att generalisera principen.

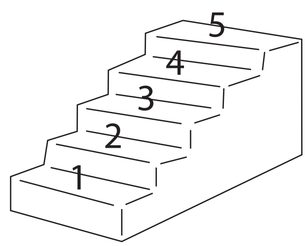
Bilden visar att vi kan gå in i C-fältet om och endast om vi tidigare har varit på antingen fält A eller B.



> Låt oss anta att vi kan ta oss till fält A på m sätt, och till fält B på n sätt, då kan vi ta oss till fält C på $m+n$ sätt.

Problem 5 – Trappan

> På hur många sätt kan vi gå upp för en femstegstrappa om vi kan ta ett eller två steg åt gången?
>
> Hitta alla alternativ!



Klassrumsaktivitet

På lågstadiet kan det vara lämpligt att läraren delar upp klassen i par. Varje par läser uppgiften och börjar med att svara på följande frågor för att klargöra vad problemet handlar om.

- ✦ Var ska man börja? (trappsteg 1)
- ✦ Var ska man sluta? (trappsteg 5)
- ✦ I vilken riktning kan du röra dig? (bara uppåt ett eller två steg i taget)

Den ena eleven i gruppen ska instruera kompisen hur hen ska röra på sig på trappan för att hamna på trappsteg 5 (till exempel: Ta ett steg i taget). Skriv ner talföljden (1, 2, 3, 4, 5). Därefter byter eleverna roller. Den andra eleven instruerar kompisen att gå upp för femstegstrappan på ett annat sätt och skriver upp talföljden (till exempel 2, 3, 5). Fortsätt på samma sätt tills ingen av eleverna kan komma på fler olika sätt.

Sortera – strukturera – formulera

På samma sätt som i Problem 4 kan elever på lågstadiet lösa Problem 5 genom att lista sina hittade fall och sedan försöka sortera dem så att de kan upptäcka om det fattas fall.

På mellanstadiet kan lösningen vara att göra en tabell och genom det bestämma antalet möjliga fall. Det handlar återigen om en medveten identifiering av de val som görs i uppgiften. Helklassdiskussionen handlar om att upptäcka regelbundenheter genom att observera, karakterisera och notera förändringen av antalet observerade fall.

Här kan man använda strategin ”tänka baklänges”, det vill säga börja med att skriva ner det antal steg som tas i sista klivet. Eftersom man antingen kan ta ett eller två steg i taget kan man bara gå upp till det 5:e steget om man går från antingen det 4:e eller det 3:e steget. Vi får därför två grupper med talföljder. I den första gruppen finns alla sätt som avslutas med att gå från trappsteg 4 till 5, i den andra gruppen alla sätt som avslutas med att gå från 3 till 5. Samma resonemang förs sedan för att ta reda på hur vi kan komma till steg 4 respektive steg 3.

Vi ser i tabellen att det finns fyra sätt att gå för att komma till 4:e trappsteget och tre sätt till 3:e trappsteget vilket innebär att det totalt finns $4 + 3 = 7$ sätt att gå upp till det 5:e trappsteget.

från 4 till 5	*från 3 till 5*
1 2 3 4 5	1 2 3 5
1 2 4 5	1 3 5
1 3 4 5	2 3 5
2 4 5	

En fullständig lösning av Problem 5 med en tabell.

På högstadiet kan Problem 4 och 5 jämföras. Eleverna kan försöka att tillsammans beskriva de gemensamma dragen i båda problemen. En generell princip skulle kunna formuleras på följande sätt:

> Ett visst objekt A kan väljas på m sätt, ett annat objekt B på n sätt. Vi undrar på hur många sätt kan vi välja ”antingen A eller B”. Svaret är på $m + n$ sätt.

Avslutande reflektion

Vi kan se att bakom kombinatorikens grundläggande principer ligger flera av matematikens områden, bland annat uppräkning av tal, antalsuppfattning och utförandet av beräkningar. Kombinatorik lämpar sig också väl för problemlösning eftersom den ger en grund för meningsfulla problem som kan lösas på olika sätt och med hjälp av en mängd olika modeller och representationer. Det är viktigt att välja uppgifter som hjälper till att bygga ett tänkande klassrum, men det räcker inte med bra uppgifter. Vad läraren gör med uppgifterna är avgörande! Läraren har stor frihet i sin tolkning av läroplanen, men även ett stort ansvar att följa den och att skapa progression för att fördjupa elevers kunskaper och öppna nya matematiska dörrar.