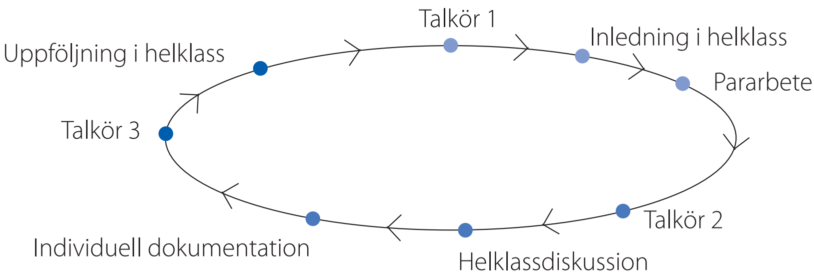
Caroline Nagy & Cecilia Kilhamn

TRR – vi introducerar talet ½

Hur kan elever i årskurs 2 arbeta med halvor och förstå talet 2 ½? I den här artikeln beskrivs erfarenheter från en lektionssekvens baserad på TRR-materialet. Lektionernas olika delar beskrivs och elevernas individuella dokumentation analyseras av lärarna i uppföljande samtal.

Under de senaste åren har NCM tillsammans med många lärare i årskurs 1–3 runt om i landet utarbetat, testat och reviderat ett undervisningsmaterial som kallas *TRR – tänka, resonera och räkna*. Materialet bygger vidare på de arbetssätt och undervisningssätt som finns i boken *Tänka, resonera och räkna i förskoleklass* som är skriven av Görel Sterner, Ola Helenius och Karin Wallby. I årskurs 1–3 består materialet av fyra teman per år, där varje tema innehåller fem cykler. Alla cykler följer strukturen i bilden där en viss matematisk idé är i fokus under tre lektioner.



Räkna med halvor – beskrivning av cykeln

I den här artikeln ska vi berätta om erfarenheter elever och lärare i Varbergs kommun gjorde när de arbetade med cykeln *Räkna med halvor* på vårterminen i årskurs 2. Vi börjar med att kort presentera cykelns olika delar.

Syftet med cykeln är att eleverna ska:

- utvidga idéerna från förra cykeln till tal med halvor (vi kallar dessa tal för ”halvtal” vilket innefattar alla tal som kan skrivas som $n + ½$, som till exempel 1 ½ och 2 ½)
- utforska tal mellan heltalen, med fokus på halvor
- få se olika sätt att uttrycka bråktal
- koppla samman olika representationer av tal.

Talkör

Var och en av de tre lektionerna i cykeln börjar alltid med att eleverna och läraren tillsammans säger en talserie i kör. Den här gången är det dubbelt och hälften som tränas för att förbereda eleverna på just dessa kombinationer som återkommer i introduktionen och som ligger till grund för skalningen av tallinjen. Tillsammans läser de följande talkör:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 … varför blev det samma?

3, 6, 12, 24, 48, 96, 48, 24, 12, 6, 3

4, 8, 16, 32, 64, 128 … varför blev det samma igen?!

5, 10, 20, 40, 80, 40, 20, 10, 5

Introduktion i helklass

En golvtallinje rullas ut och begreppen *dubbelsteg* och *halvsteg* införs genom att eleverna får gå på en golvtallinje. Tanken är att eleverna ska uppleva att om man tar hälften så långa steg (halvsteg) så får man gå två steg på varje vanligt steg, och om man tar dubbelt så långa steg (dubbelsteg) så blir det hälften så många som de vanliga stegen.

Vanliga steg jämförs med dubbelsteg och halvsteg och på tavlan skrivs följande likheter upp:

5 dubbelsteg	=	10 steg	=	20 halvsteg
3 dubbelsteg	=	6 steg	=	12 halvsteg

Avslutningsvis ställs frågan: *Var hamnar man om man går två och ett halvt steg på tallinjen?* Om man tar halvsteg istället, hur många halvsteg måste man då gå för att hamna på samma plats? Eleverna får först resonera och komma med förslag, sedan får någon testa. Resultatet skrivs under de övriga på tavlan.

2 och ett halvt steg = 5 halvsteg

Pararbete

Under pararbetet som följer får eleverna samarbeta för att sätta ut tal på en tallinje där enbart talen 0 och 1 är utsatta. Till sin hjälp har eleverna också multilinkbitar som de kan använda för att ”mäta upp” tallinjen. En del elever får en tallinje där det är precis en bit mellan 0 och 1. Andra får en mer utmanande tallinje där avståndet är två bitar mellan 0 och 1.

Märk ut följande tal på tallinjen: en halv, en och en halv, tre och en halv, fyra och en halv

Helklassdiskussion

I helklassdiskussionen får eleverna motivera hur de har placerat ut talen och även visa det på golvtallinjen. Nu introduceras skrivsättet $\frac{1}{2}$ och $1\frac{1}{2}$, och bråkets utseende och olika delar diskuteras (täljare, nämnare, blandad form, samt *en halv som en av två lika delar*). Skillnaden mellan de två tallinjerna diskuteras också – att på den andra är 1 dubbelt så långt i bitar räknat som på den första, men att de har olika skala och båda därför visar talet 1. Alla tal på samma tallinje följer den skala som just den tallinjen har.

Individuell dokumentation

Efter pararbetets uppföljning följer alltid en individuell dokumentation där eleven på egen hand får brottas med innehållet. Då blir det också mycket synligt hur väl varje elev förstått innehållet och vilka saker som behöver diskuteras i helklass eller ägnas mer tid.

I den här cykeln är uppgiften att eleverna ska gradera en tallinje och sätta ut några tal med halvor i. Till sin hjälp har eleverna multilinkbitar för att mäta med om de vill och en tom tallinje. Alla ska sätta ut talet $2\frac{1}{2}$ på sin tallinje och läraren skriver det i blandad form på tavlan.

Bestäm hur många bitar 1 är på din tallinje!

Visa var 2 och en halv är, och förklara hur man hittar var det talet är på tallinjen. Märk ut några andra tal på din tallinje.

På min tallinje är 1 = __ bitar

Uppföljning i helklass

Den tredje och sista lektionen i cykeln ägnas alltid åt att följa upp elevernas individuella dokumentation i helklass och olika aspekter av det matematiska innehållet diskuteras. Här är lärarens roll att lyfta upp olika sätt att förstå de matematiska begrepp som cykeln handlar om. Speciellt viktigt är att låta elevernas tankar vara utgångspunkt och att lyfta fram eventuella missförstånd eller oklarheter.

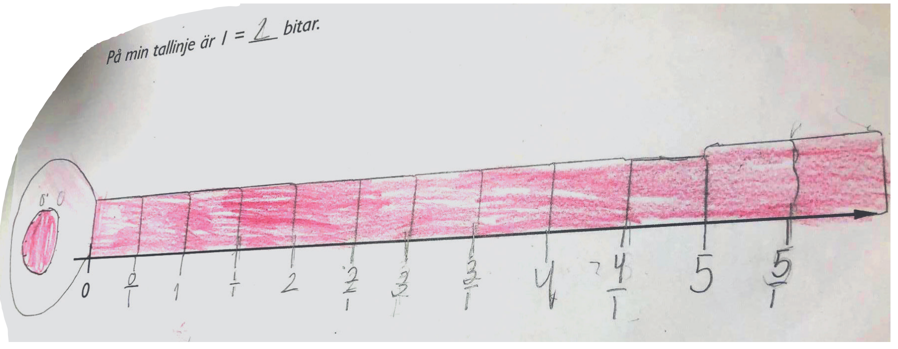
Lärarnas lärande

När lärargruppen hade genomfört hela cykeln i sina klasser samlades de för att diskutera sina genomförda lektioner med fokus på elevernas olika lösningar. Vi ska här titta lite närmare på några elevers individuella dokumentation och vad lärarna lärde sig av dessa.

Lärarna började med att samtala om instruktionen på arbetsbladet: *På min tallinje är 1 = ____ bitar* som några elever misstolkade genom att de lät 1 multilinkbit motsvara ett valt tal, exempelvis talet 2. Det innebar att ju högre tal dessa elever valde desto kortare sträcka blev det mellan 0 och 1 på tallinjen, vilket blev tvärtemot resultatet för de elever som tolkade instruktionen korrekt. Här blev det tydligt hur viktigt språket är även i matematikundervisningen.

Enheten 1 representeras av två bitar

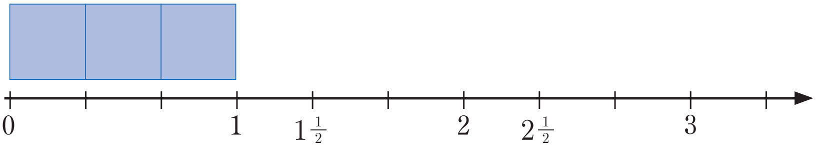
Lärargruppen lyfte i sitt samtal att många elever insåg att när man väljer att enheten 1 ska representeras av två bitar blir det enkelt att se var halvorna kommer eftersom varje halvsteg då motsvarar en bit. Titta till exempel på Annas dokumentation där hon har ritat ut heltalen korrekt på vartannat streck. Annas lärare berättade att hon under uppföljning i helklass sa alla talen helt korrekt även om noteringen hade blivit fel. Skrivsättet $\frac{1}{2}$ var nytt för eleverna och här blev det tydligt att det var symbolspråket som behövde mer fokus framöver. Det fanns också elever som skrev $\frac{1}{2}$ på varje ”halvtal”, istället för att skriva $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ och så vidare. Utifrån dessa exempel diskuterade lärarna hur de i undervisningen skulle kunna prata mer om olika skrivsätt.



Annas tallinje

Enheten 1 representeras av tre bitar

Några elever valde att enheten 1 skulle representeras av tre bitar vilket gjorde det lite svårare att hitta ”halvtalen” mitt emellan heltalen. Lärarna uppmärksammade särskilt en elevlösning där Börje skrivit $1\frac{1}{2}$ närmre 1:an än 2:an, $2\frac{1}{2}$ närmre 2:an än 3:an och så vidare, istället för mitt emellan.



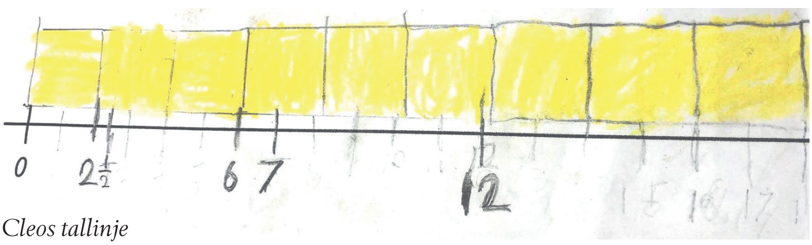
Börjes tallinje

En jämförelse mellan två tallinjer där enheten är delad i två respektive tre delar skulle kunna ligga till grund för ett samtal om skillnaden och en introduktion av begreppet tredjedelar. I TRR-materialet görs detta i årskurs 3 men om eleverna själva ritar tallinjer som dessa finns ingen anledning att vänta med att plocka upp det. Undervisningen bör alltid sätta elevernas tankar och arbete i centrum.

En intressant reflektion som lärarna gjorde var att de starkare eleverna oftare valde att låta enheten representeras av ett jämnt antal bitar (eller en bit) medan valet av tre bitar för enheten 1 gjordes av några svagare elever. De som valde ett jämnt antal bitar insåg förmodligen att halvtalen blev lättare att hitta på tallinjen, vilket tyder på att dessa elever hade en större förståelse för begreppet ”halv” och en mer utvecklad förståelse för udda och jämna tal. En utmaning för eleverna i den individuella dokumentationen handlar därmed också om att kunna upptäcka konsekvenserna av de val de gör.

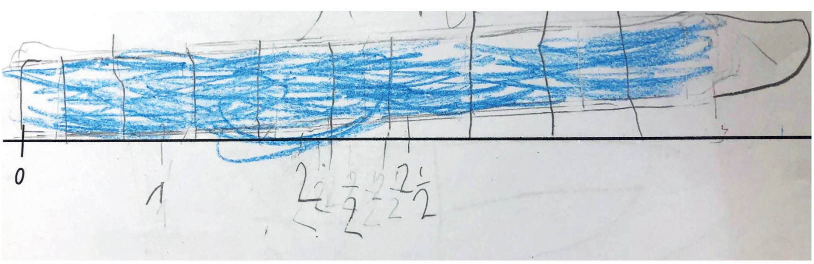
Enheten 1 representeras av halva bitar

Det fanns även elever som valde att utmana sig genom att välja ett ”halvtal” som representation av enheten 1. Talet $\frac{1}{2}$ representeras då av *en fjärdedels* bit som i Cleos lösning, och av *en och en fjärdedels bit* i Davids fall.



Cleos tallinje

Cleo valde att låta enheten 1 representeras av ”en halv bit”. Det innebar att alla jämna tal hamnade på linjerna och alla udda tal mitt emellan. Hon placerade utan problem ut 2, 6, 7 och 12 och gjorde även svaga markeringar för alla andra heltal däremellan. Sedan blev det ganska lätt att placera talet 2 ½ mitt emellan 2 och 3.

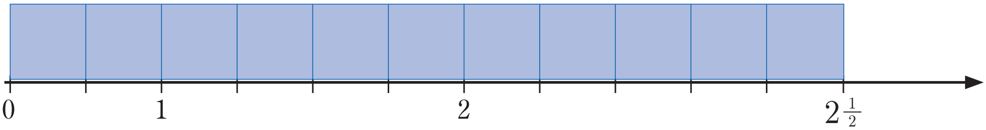


Davids tallinje

David valde 2 ½ bitar som representation av enheten. Han lyckades bra med att placera ut talen 1 och 2. För att sedan placera ut talet 2 ½ behövde han ta reda på hur många bitar ett halvt steg är på tallinjen, det vill säga hur långt hälften av 2 ½ bitar skulle vara. David kom fram till att ett halvt steg på tallinjen motsvarar 1 ¼ bitar och har helt korrekt markerat talet 2 ½ efter *sex och en fjärdedels* bitar.

Bristande förståelse för tallinjen som ekvidistant

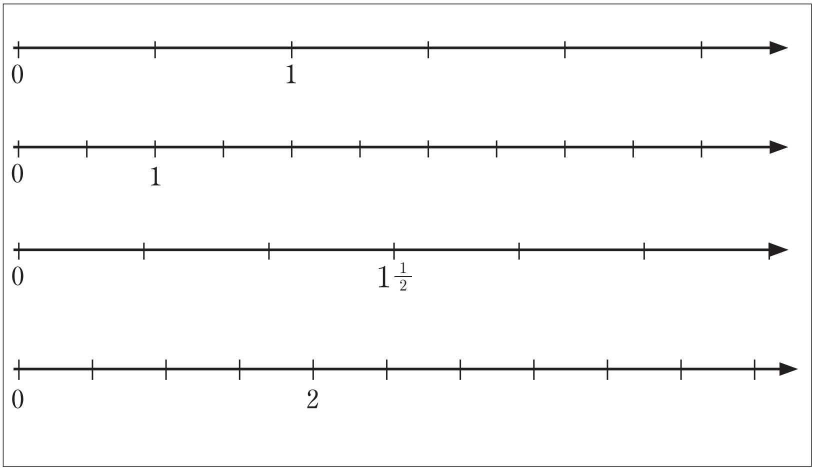
Emil, som hade valt 2 bitar för att representera enheten 1, ritade på detta vis:



Lärarna funderade på om Emil såg tallinjen som ett mönster och ansåg att det visade att han ännu inte hade full förståelse för tallinjen. En tolkning är att Emil bara tittade på sträckorna *mellan* varje tal och såg dem som separata representationer av de olika talen. Mellan 0 och 1 finns två bitar som representation av talet 1, mellan 1 och 2 finns därför fyra bitar som representation av talet 2. Mellan 2 och $2\frac{1}{2}$ finns följaktligen fem bitar som representation av talet $2\frac{1}{2}$. Eleven visar här full förståelse för den proportionella skalningen (med dubbelt så många bitar för 2 som för 1), men bristande förståelse för hur tallinjen är uppbyggd där talen alltid placeras utifrån sitt avstånd från nollan. Läraren berättade att hon i denna situation valde att diskutera talet 0 och poängtera nollans betydelse som utgångspunkt.

Uppföljningsuppgift

Lärare som arbetar med TRR följer den strikta lektionsplaneringen under tre lektioner varje vecka. Övrig tid kan användas för att på olika sätt stärka eller variera det som cykeln handlat om. Dessa lärare gjorde en uppföljningsuppgift till den här cykeln där eleverna fick träna på att placera ut tal på tallinjer där ettan alltid motsvarades av två ”bitar” men där dessa bitar kunde vara olika långa. På varje tallinje var ett tal utplacerat och elevernas uppdrag var att fylla i de tal som saknades vid de övriga markeringarna (alla hel och halvtal).



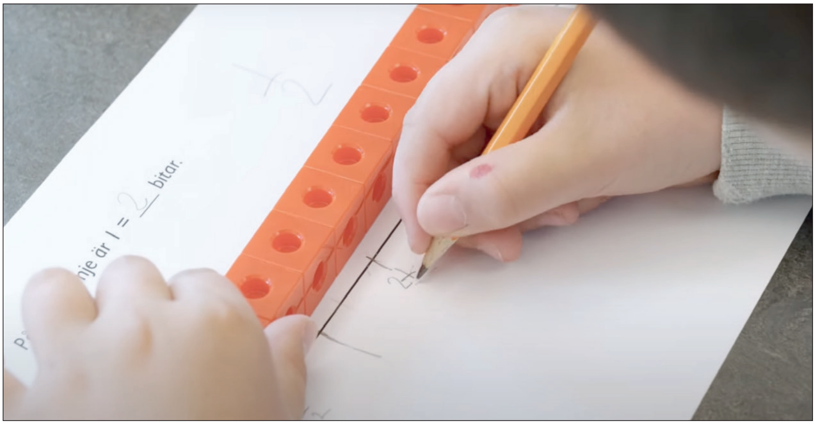
På den första tallinjen var det några elever som skrev en halv som 0,5 i decimalform istället för i bråkform. Lärarna lät dem skriva på detta sätt där men tog upp en diskussion om de olika skrivsätten och såg sedan till att alla övergick till bråkform på de övriga tallinjerna.

Viktiga poänger i cykeln

I denna cykel får eleverna erfarenheter av att ”halvtal” kan vara större än 1, och får använda tallinjen för att utforska dessa tal. Detta sätt att erfara bråk kan jämföras med när tal i bråkform introduceras enbart som ”del av helhet”, till exempel med cirklar eller chokladkakor, då det finns en risk att eleverna fastnar i att bråk alltid är mindre än 1.

I och med att eleverna får bestämma hur många bitar som ska användas för att representera 1 på tallinjen får de även erfarenheter av proportionalitet och tallinjens linjäritet. När eleverna har bestämt antal bitar är deras uppgift att normera situationen och att mäta ut talen med hjälp av multilinkbitar. Eleverna får därmed arbeta med flera matematiska aspekter på samma gång, i motsats till när matematiken bryts ner till förenklade byggstenar som sedan byggs en i taget. I cykeln får eleverna brottas med matematiken och de får en djupare förståelse.

Den individuella uppgiften är konstruerad så att eleverna ska få utforska begreppen och sambanden mellan dem med hjälp av tallinje och multilinkbitar. Lösningarna blir olika beroende på hur många bitar de väljer som ska representera 1. När 1 representeras av 2 bitar blir det enkelt att hitta halvtalen. När 1 representeras av 3 bitar är det en betydligt större utmaning att hitta halvtalen. Valet av tal leder till olika utmaningar och strategier för att hitta talet 2½ på tallinjen. Den stora variationen i lösningar blir sedan utgångspunkt för läraren att tillsammans med eleverna resonera vidare om hur man kan hitta halvtalens placeringar på tallinjen samt hur talen skrivs och uttalas. De elever som ännu inte fullt ut har förstått någon av de matematiska idéerna, som till exempel linjäritet eller hur talen skrivs, får möjlighet att lyssna på hur andra elever har resonerat och förhoppningsvis ta till sig nya sätt att tänka. Elevernas olika lösningar visar att det går att utmana eleverna med flera matematiska idéer på en och samma gång redan när de går på lågstadiet.



Artikelns foton på barn som arbetar med cykeln är hämtade från en film om hur de arbetar med TRR på Pilängskolan i Landskrona, gjord av Landskrona stad: Undervisningsmodellen Tänka, Resonera och Räkna – TRR.