David Taub

Ett algebraiskt verktyg

I denna text visar författaren olika intressanta och ibland kraftfulla egenskaper hos ett speciellt algebraiskt uttryck som går tillbaka på kunskapen om stambråk. Här beskrivs hur uttrycket kan fungera som ett algebraiskt verktyg som är användbart vid kluriga problem som förekommer i matematiktävlingar.

Hela den här texten handlar om ett intressant algebraiskt verktyg i form av ett ganska enkelt uttryck. Det kan vara så att mycket av det jag kommer att gå genom är mest intressant för elever som vill delta i matematiktävlingar, men det mesta går också att använda vid problemlösning för att förbättra förståelse för och färdigheter i algebra. Uttrycket vi utgår från är:

$$x \pm \frac{1}{x}$$

Historiskt perspektiv

Redan för 4000 år sedan insåg Babylonier kraften med att jobba med inverterat tal. De skapade tabeller med stambråk (som är de inverterade talen till naturliga tal) och skrev ner metoder för att lösa ekvationer av formen:

$$n + \frac{1}{n} = k$$

där n är ett positivt heltal och k är ett givet tal. Deras metod var baserad på följande identitet:

$$\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)^2$$

Med hjälp av identiteten och rotdragning, som de hade effektiva metoder för, kunde man hitta värdet på $n - \frac{1}{n}$, och sedan hitta n med hjälp av den ursprungliga ekvationen eftersom:

$$\left(n + \frac{1}{n}\right) + \left(n - \frac{1}{n}\right) = 2n$$

Nyckeln är att kvadrera

Kraften med uttrycket är baserad på det som händer när man kvadrerar det:

$$\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 2$$

Nu har något intressant hänt. Högerledet ser ut som vänsterledet i form, men med en större exponent och en konstant term som skillnad. Konstanttermen uppstår eftersom $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. För enkelhetens skull kommer resten av texten att utgå från addition även om algebran är ungefär densamma om vi börjar med $x + \frac{1}{x}$ eller $x - \frac{1}{x}$.

Till exempel kan vi börja med: $x + \frac{1}{x} = k$

Sedan kan vi kvadrera båda led: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = k^2$

Och då får vi: $x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$

Vi kan fortsätta att bygga på mönstret på olika sätt. Om vi kvadrerar igen, upprepar sig mönstret direkt: $x^4 + \frac{1}{x^4} = (k^2 - 2)^2 - 2$

Ett alternativ är att multiplicerar med $x + \frac{1}{x}$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x}$$

Här återfår vi $x + \frac{1}{x}$, men eftersom vi känner till värdet på det uttrycket kan vi lätt hitta värdet på $x^3 + \frac{1}{x^3}$, och på så sätt successivt hitta värdet för vilken exponent som helst.

Hur litet kan $a + \frac{1}{a}$ vara?

Vi kan nu enkelt svara på en fråga som man ser ibland i andra matematiska problem. Om a är ett positivt reellt tal hur liten kan $a + \frac{1}{a}$ vara?

Vi kan börja så här: $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$

Detta är uppenbart då ett reellt tal i kvadrat inte kan vara negativt. Nu kan vi använda förhållandet vi gick igenom tidigare för att få:

$$a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \implies a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Här ser vi att summan av ett positivt tal och dess inverterade form alltid är större eller lika med 2, med likhet bara när $a = 1$.

Tävlingsproblem 1

Här är en fråga från en matematiktävling för högstadiet i USA.

$$\text{Om } x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ hitta } x^4 + \frac{1}{x^4}$$

Att hitta rötterna och sedan räkna ut x^4 skulle inte vara särskilt roligt. Men vi kan snabbt och lätt lösa uppgiften med hjälp av det vi har gått genom och lite kunskap om Vietas formler.

Om x_1 och x_2 är rötterna till ekvationen, då vet vi att $x_1 \cdot x_2 = 1$ och $x_1 + x_2 = 3$.

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \implies x_2 = \frac{1}{x_1} \implies x_1 + \frac{1}{x_1} = 3$$

När vi nu vet vi att $x + \frac{1}{x} = 3$ är det bara att kvadrera två gånger och problemet är löst:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \implies x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9 \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 49 \implies x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 49 \implies x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$$

Svaret är då 47.

Tävlingsproblem 2

Här är ett problem från den internationella matematiktävlingen IMO.

$$\text{Om } x^2 + \frac{1}{x^2} = 34, \text{ och } x > 0, \text{ hitta } x^5 + \frac{1}{x^5}$$

Från tidigare vet vi att om $x + \frac{1}{x} = k$ då är $x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$, vilket ger att:

$$k^2 - 2 = 34 \implies k^2 = 36 \implies k = 6 \implies x + \frac{1}{x} = 6$$

Då kan vi hitta svaret genom att först hitta några mellansteg:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 34 \cdot 6$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 6 = 204 \implies x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 34^2 \implies x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 1156 \implies x^4 + \frac{1}{x^4} = 1154$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 1154 \cdot 6$$

$$\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + 198 = 6924 \implies x^5 + \frac{1}{x^5} = 6726$$

Svaret är då 6726.

En mer generell fråga

Givet att $x+\frac{1}{x}=k$, kan vi hitta en formell till $x^n+\frac{1}{x^n}$?

Svaret är ja, det kan vi göra. Men vi behöver ett verktyg till som jag kommer att använda utan att förklara här, nämligen hur man löser differensekvationer som till exempel den som beskriver Fibonaccital.

Vi böjar med att definiera: $f(n)=x^n+\frac{1}{x^n}$

Då är det lätt att se att $f(0)=2$ och det är givet att $f(1)=k$.

Nu tittar vi på $f(1)\cdot f(n-1)$:

$f(1)f(n-1)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{x-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=x^n+\frac{1}{x^n}+x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}=f(n)+f(n-2)$

Och nu har vi en differensekvation med två randvillkor:

$$f(n)=k\cdot f(n-1)-f(n-2)$$

Om vi för enkelhetens skull antar att $k>2$, får vi genom metoder för differensekvationer:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^n+\left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^n$$

Programmering

Den sortens rekursiva beräkningar som vi har gjort ovan kan lätt ligga till grund för diverse programmeringsuppgifter, till exempel:

> Skriv ett program där användaren ska ange två positiva heltal, k och n.
>
> Programmet ska sedan ange värdet på $x^n+\frac{1}{x^n}$ givet att $x+\frac{1}{x}=k$ och att:
>
> $$x^n+\frac{1}{x^n}=k\cdot\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

Följande är en möjlig lösning i Python:

```python
k=int(input("Ange starttalet k: "))
n=int(input("Ange önskad exponent n: "))

xnlist = [2,k]
#x^0+1/x^0=2 alltid och x^1+1/x^1=k

e = 2 #exponent vi ska räkna ut

while e <= n:
    xn = k*xnlist[e-1]-xnlist[e-2]
    xnlist.append(xn)
    e=e+1

print(f"x^{n} + 1/x^{n} = {xnlist[-1]}")
```

Fjärdegradsekvationer

Uttrycket $x + \dfrac{1}{x}$ kan också användas för att lösa vissa fjärdegradsekvationer som har formen: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Till exempel: $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$

Låt $p(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ och låt $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2}$

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Låt $z = x + \dfrac{1}{x}$, då får vi $z^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$ som ger:

$$g(z) = z^2 + 3z = z(z+3) = 0 \implies z_1 = 0,\ z_2 = -3$$

Vi använder båda lösningarna som med $z = x + \dfrac{1}{x} \implies x^2 - zx + 1 = 0$ och behöver nu lösa två vanliga andragradsekvationer:

För $z = 0$ får vi: $x^2 + 1 = 0 \implies x_{1,2} = \pm i$

För $z = -3$ får vi: $x^2 + 3x + 1 = 0 \implies x_{3,4} = \dfrac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$

Nu har vi fått alla fyra lösningarna till den ursprungliga ekvationen.

Författaren har skrivit en applikation som visar alla steg i beräkningen för fjärdegradsekvationer. Den återfinns på adressen: math.ylemnova.com/palquart.html