Lärartankar

med Russell Hatami

Tänkandets skönhetsglädjekraft

> *Det matematiska skapandets uppkomst är ett problem som i hög grad borde intressera psykologen. Det är den verksamhet där den mänskliga intelligensen tycks hämta minst från den yttre världen, där den verkar eller tycks verka enbart av sig själv och på sig själv, så att vi under studiet av det geometriska tänkandets process kan hoppas på att finna det väsentliga i den mänskliga intelligensen.*
>
> Henri Poincaré

Det hävdas att matematiken bör undervisas med hjälp av konkret material – det är utmärkt! Samtidigt pratas det mycket om konkretisering, men vad innebär konkretisering egentligen? Är det en process som liknar lärprocessen i matematikinlärning?

Matematiken upptäcker vi vanligtvis utifrån konkreta och enkla förhållanden omkring oss, och matematikens styrka ligger i dess abstrahering. Men konkretisering är en process åt andra hållet som kräver att du redan kan matematik och istället söker efter tillämpningar och exempel i naturen eller samhället. När vi lär oss, upptäcker och konstruerar matematik sker detta genom en abstraktionsprocess och inte genom konkretisering.

Det sker en ständig dialektisk utveckling mellan tänkande och räknande i matematik och det finns skönhetsglädje i denna process. En glädje som inte bara ägs av individer utan som delas i lika hög grad av alla som försöker förstå denna process. Historien om Gauss tankar är ett bra exempel på detta.

Gauss tankar om en talserie

Historien säger att en nioårig kille som för runt 200 år sedan för första gången, och utan någon annans hjälp, upplevde skönhetsglädje när han räknade ut summan av en talserie. Karl Fredrich Gauss blev en framstående matematiker och kallas ibland för *Matematikens konung*. Detta exempel, med en liten ändring anpassad till dagens undervisning, kan se ut enligt följande:

A. Addera alla heltal från 1 till 10
B. Addera alla heltal från 1 till 100
C. Addera alla heltal från 1 till 1000
D. Finns det något mönster som underlättar beräkningen på ett generellt plan?

Operationen $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ verkar inte så tidskrävande jämfört med uppgift B och C ovan. Men hur kan vi göra som matematiker? Börjar vi med att räkna eller börjar vi med att fundera? Börjar vi räkna kan vi lägga ihop tal efter tal och får då summan 55. Gjorde lille Guass på detta sätt? Nej, han funderade – och kom fram till ett enklare sätt.

Det är viktigt att vi då och då tänker *relationellt*. Det första talet är 1, därefter hoppar vi ett steg framåt och får talet 2 och fortsätter sedan på samma sätt. Detta ger oss en serie av tal som hela tiden ökar med en enhet. Det första och sista talet har summan 11. Det här gäller även det andra och näst sista talet och så vidare.

$$1+10=2+9=3+8=4+7=5+6=11.$$

Alltså har vi 5 par ($=\frac{10}{2}$) där varje pars summa är lika med 11. Med andra ord har vi fem stycken elvor: $\frac{10}{2}\cdot 11=5\cdot 11=55$. Med detta resultat i bagaget kan vi se samma relation i de två övriga serierna.

$1+2+3+\ldots+98+99+100$ kan beräknas som $\frac{100}{2}$ talpar med summan $(100+1)$.

$1+2+3+\ldots+998+999+1000$ kan beräknas som $\frac{1000}{2}$ talpar med summan $(1000+1)$.

Vi kan alltså konstatera:

- summan av de första 10 heltalen är 55
- summan av de första 100 heltalen är 5050
- summan av de första 1000 heltalen är 500500.

Betraktar vi detta mönster kan vi konstatera att summan av de första 1000000 naturliga talen från och med 1 är 500000500000.

> *Matematikens visshet beror på dess totala abstrakta allmängiltighet.*
>
> Alfred North Whitehead

Brobyggande abstraktion

Varför är det viktigt att skriva $\frac{10}{2}$ istället för 5? Jo, symbolen 5 i den här kontexten är bortkopplad från sitt utsprung. Talet 5 isoleras på något sätt och kan inte direkt hjälpa oss att se tänkandet bakom. Däremot påminner $\frac{10}{2}$ oss om strukturen i beräkningen och är därmed ett viktigt delmoment i abstraktionsprocessen. Ett steg i denna process är att lära sig generalisera genom att använda vanligt språk och logiska resonemang. Enkelt uttryckt:

$$\text{antalet par} = \frac{\text{antalet individer}}{2}$$

Det visste vi redan, men inte på samma sätt som nu. I den konkreta världen behöver vi två individer för att bilda ett par. Här kan ett pedagogiskt språng ske när vi ställer frågan: Hur många par bildas av 11 individer? I vardagsspråket är svaret 5 par och en ensam individ. I matematiken, liksom i poesin, dansar våra tankar och känslor mellan två världar – den konkreta och den fantasifulla världen. Denna dans är brobyggandet mellan konkret räknande och en abstrakt värld som ger oss större frihet. Svaren $\frac{11}{2}$ *par* eller *5,5 par* låter orealistiskt och mycket konstigt, medan det i abstraktionsprocessen är ett nödvändigt steg som får en brobyggande karaktär. Detta kan liknas vid följande romantiska dikt av Erik Axel Karlfeldt:

> *Dina ögon äro eldar och min själ är beck och kåda.*
> *Vänd dig från mig, förr'n jag tändes som en mila innantill!*
> *En fiol jag är med världens alla visor i sin låda,*
> *Du kan bringa den att spela, hur du vill och vad du vill.*

Vad händer om vi vill addera de naturliga talen från 1 till vilket tal som helst? Istället för 10, 100 eller 1000 skriver vi n. Det abstrakta svaret är att summan av en talserie är lika med *antalet tal delat med två* multiplicerat med *talparets värde*:

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

> *Matematiken är fortfarande intensivt levande och hämtar näring från sina djupa rötter i ande och natur.*
>
> Hermann Weyl

Att använda den abstrakta kunskapen

De insikter vi fått av att fundera över talserierna ovan kan vi använda oss av i många mer eller mindre abstrakta sammanhang.

- Vi kan bestämma summan av de första 50 udda talen $1+3+5+\ldots+95+97+99=\frac{50}{2}\cdot(1+99)=2500$.
- Vi kan titta på andra talserier där talen ökar med samma tal. Är 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51 en sådan talserie? Ja, eftersom talen i serien ökar med samma tal, i det här fallet med 7 varje gång (7-hopp). Vi kan därför beräkna summan som $\frac{8}{2}\cdot(51+2)$.
- Vi kan beräkna nya tal i en talserie när vi känner till ökningen. Vilken är den åttioförsta termen i talserien 3, 9, 15 … ? Talserien är uppbyggd av 6-hopp. För att komma till den *andra* termen måste vi göra ett 6-hopp från första termen: $3+1\cdot6=9$. På liknande sätt kan vi tänka oss att till den *tionde* termen bör vi vara $3+9\cdot6=3+54=57$. För att inte tappa bort att det är den tionde termen vi beräknar skriver vi ”en enhet mindre än tio” som med symboler uttrycks $(10-1)$. Således kan det sökta talet formuleras så här:

  $$\textit{första termen}+(\textit{sökta termens nummer}-1)\cdot 6.$$

  Detta ger oss för den åttioförsta termen: $3+(81-1)\cdot6=3+480=483$.

Några uppgifter att fundera på

1. Bestäm summan av talserien 17, 24, 31 … 1410

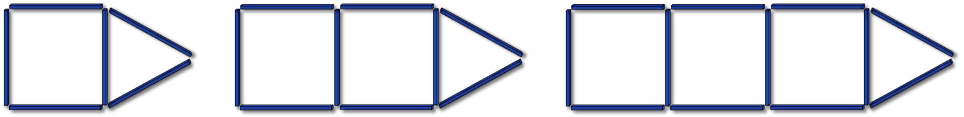
Liksom tidigare kan vi även här konstatera att vi i talserien har 7-hopp. Vi kan skriva några nya passande termer, exempelvis 17, 24, 31, 38, 45 … 1403, 1410.

Vi summerar första och sista termen och får 1427. För att bestämma summan vet vi sedan tidigare att detta ska multipliceras med antal par. Vi känner inte till antalet termer, men vi vet att vi kan få fram till exempel 1410 genom följande relation: $17 + (\textit{sökta termens nummer} - 1) \cdot 7 = 1410$.

Detta ger att $(\textit{sökta termens nummer} - 1) \cdot 7 = 1393$ och vidare att den $(\textit{sökta termens nummer}) - 1 = 199$. Alltså har vi 200 termer och därmed är summan av talserien lika med:

$$\frac{200}{2} \cdot (17 + 1410) = 100 \cdot 1427 = 142700$$

2. Följande figurer består av stickor.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

i. Hur många stickor behövs för den tjugonde figuren?
ii. Hur många stickor behövs för den hundrade figuren?
iii. Hur många stickor behövs för den *n*-te figuren (figur *n*)?
iv. Hur många stickor behövs för de första tjugo figurerna tillsammans?
v. Hur många stickor behövs för de första *n* figurerna tillsammans?

Vi funderar tillsammans: Det kan vara bra att räkna hur många stickor vi har i var och en av de tre första figurerna. Jo, 6, 9 respektive 12 stycken. Det ser ut som en talserie med 3-hopp. På så vis kan vi med hjälp av tidigare kunskaper besvara alla frågor. Vi gör ett försök:

i. Hur många stickor behövs för *figur 20*?
Antalet stickor i figur 20 är: $6 + (20 - 1) \cdot 3 = 6 + 60 - 3 = 63$.

ii. Hur många stickor behövs för *figur 100*?
Antalet stickor i figur 100 är: $6 + (100 - 1) \cdot 3 = 6 + 300 - 3 = 303$.

iii. Hur många stickor behövs för den n-te figuren?
Antalet stickor i figur n är: $6 + (n - 1) \cdot 3 = 6 + 3n - 3 = 3 + 3n$.
Med hjälp av detta uttryck kan vi bestämma antalet stickor i vilken figur som helst genom att ersätta n med det önskade figurnumret.

iv. Hur många stickor behövs för de första 20 figurerna tillsammans?
$\frac{20}{2} \cdot (6 + 63) = 10 \cdot 69 = 690$.

v. Hur många stickor behövs för de första n figurerna tillsammans?
$\frac{n}{2}(6 + 3 + 3n) = \frac{n}{2}(9 + 3n)$.

3. Observera följande talserie där a och d är positiva reella tal:
   $(a), (a+d), (a+2d), (a+3d), (a+4d) \ldots$

   i. Bestäm den tjugofemte termen i talserien.
   ii. Bestäm term nummer n i talserien.
   iii. Bestäm summan av de första tjugofem termerna i talserien.
   iv. Bestäm summan av de första n termerna i talserien.

i. $T_{25}=a+(25-1)d=(a+24d)$

ii. $T_n=a+(n-1)d$

iii. $S_{25}=\frac{25}{2}\cdot(a+a+24)=\frac{25\cdot(2a+24)}{2}=25\cdot\left(\frac{2a}{2}+\frac{24}{2}\right)=25\cdot(a+12)$

iv. $S_n=\frac{n}{2}\cdot(a+a+(n-1)d)=\frac{n\cdot[2a+(n-1)d]}{2}$

LITTERATUR

Poincaré, H. (1956). *Matematiskt skapande.* I J. Newman (red) Sigma, en matematikens kulturhistoria, band 5. Forum.

Weyl, H. (1956). *Matematikerns sätt att tänka.* I J. Newman (red) Sigma, en matematikens kulturhistoria, band 5. Forum.

Whitehead, A. N. (1956).*Matematiken som ett element i tänkandets historia.* I J. Newman (red) Sigma, en matematikens kulturhistoria, band 1. Forum.

Karlfeldt, E. A. (1963). *Den svenska lyriken: Erik Axel Karlfeldts dikter.* Wahlström & Widstrand.

Skruvar och muttrar

Omslagsbilden är den här gången tagen i arkitektutbildningens verkstadslokal på Chalmers tekniska högskola i Göteborg. När verkstaden senast byggdes om hittades denna möbel övergiven i ett förråd. Det är en slags byrå i trä med små lådor från golv till tak längst en hel vägg. Lådorna är specialanpassade för att rymma den äldre sortens stora diabilder som utgjorde stommen till föreläsningarna på arkitektutbildningen före digitaliseringen. Istället för att slänga möbeln tog *Tabita Nilsson*, tekniklektor och en av de ansvariga för verkstaden, hand om möbeln och gjorde om den till förvaring för skruvar och muttrar med olika dimension och utseende.