Mårtensson, Gunnarsson, Pang & Lee

Att undervisa utifrån Shanghai-traditionen

Om addition med tal i bråkform

Författarna beskriver fyra principer som kan leda till att matematikundervisningen ger elever goda förutsättningar för lärande. Principerna illustreras genom en lektion i årskurs 5 på en skola i Shanghai. Eleverna ska ta steget från att addera liknämniga bråk till att addera bråk med olika nämnare.

Världens blickar har under de senaste decennierna riktats mot östra Asien när lärande och undervisning i matematik står i centrum för diskussionen. Shanghai, Hongkong och Singapore brukar specifikt nämnas och uppmärksammas. En anledning till det ökade intresset är troligtvis att dessa regioner så ofta placerar sig i topp i olika internationella mätningar som TIMSS och PISA medan många OECD-länder, inklusive Sverige, oftast hamnar på mer blygsamma placeringar när genomsnittligt resultat i matematik jämförs. Dessutom når en betydligt större andel elever från dessa regioner, än från Sverige, de allra högsta prestationsnivåerna som innebär att eleverna visar mer avancerade matematiska förmågor som till exempel kan användas för att gripa sig an tidigare okända problem. Dessa mätningar har troligtvis legat till grund för en rad olika insatser de senaste åren i syfte att utveckla matematikundervisning i Sverige och andra länder. Bland annat har nya läromedel i matematik, med influenser av östasiatisk tradition, introducerats på den svenska marknaden, och i England har man sedan 2014 genomfört *The Shanghai – England Maths Teacher Exchange*, vilket innebär att över 700 lärare i England har fått lära sig av och inspireras av lärare från Shanghai.

Men vad är det som gör att matematikundervisning i just Shanghai verkar ge så goda förutsättningar för elevernas lärande? En förklaring som ofta lyfts fram är att östasiatiska lärare generellt sett har mycket goda matematikdidaktiska kunskaper. Det förklaras ofta med den kollegiala och regelbundna undervisningsutveckling som är vanlig på skolor i dessa regioner (Ma, 1999; Stigler & Hiebert, 1999). I flera vetenskapliga studier har man undersökt vad som karaktäriserar god matematikundervisning, framför allt i området kring Shanghai (se till exempel Bao, Huang, Yi & Gu, 2003; Gu, Huang, & Marton, 2004 och Pang, Marton, Bao & Ki, 2016). Detta har resulterat i en beskrivning av en undervisningstradition som kallas *bianshi jiaoxue* (att undervisa med variation), eller ibland bara *bianshi*. I korthet handlar bianshi om vilka exempel läraren väljer och hur dessa kan användas för att skapa systematisk variation av ett ämnesinnehåll. Undervisningstraditionen innefattar flera intressanta principer för hur sådan variation kan skapas när man planerar och genomför undervisning. Speciellt handlar det om hur uppgifter länkas samman för att skapa ett fördjupat lärande. I denna artikel kommer vi att beskriva fyra sådana principer (fritt översatt från forskningsartiklarna):

1. utveckla ny kunskap via systematisk variation av tidigare kunskap
2. systematisk variation av en egenskap via olika typexempel
3. systematisk variation av representationsformer
4. ett problem – systematisk variation av lösningsmetoder.

I den här artikeln vill vi, genom att ge exempel från en lektion i årskurs 5 i Shanghai, visa hur dessa principer används i praktiken. Syftet med lektionen är att eleverna ska utveckla kunskap om att addera tal i bråkform. Lektionen består av tre delar där läraren i varje del vill belysa ett specifikt matematiskt innehåll eller en idé som är nödvändig för att eleverna ska utveckla denna kunskap.

Del 1: Man kan addera bråktal med samma nämnare, men är det möjligt att addera bråktal med olika nämnare?

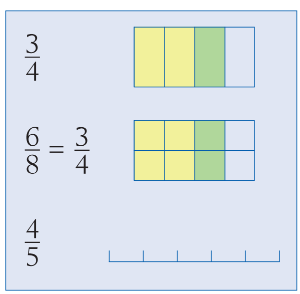
I den inledande delen av lektionen presenterade läraren tre exempel (figur 1a) på tavlan där eleverna skulle addera liknämniga bråk. Att lösa uppgifter av det här slaget var inget nytt för eleverna vilket gjorde att de svarade både snabbt och rätt. Läraren undrade hur det kom sig att de kunde utföra beräkningarna så enkelt och elevernas svar var ”när det är samma nämnare är det bara att addera ihop täljarna”. Elevernas svar och beräkningar för respektive exempel noterades på tavlan av läraren (figur 1b) och följdes upp med frågan: ”Vad innebär det att talen har samma nämnare?”. Eleverna uttryckte detta på olika sätt, till exempel: ”De har samma enheter”, ”Talet som det divideras med är samma” och ”De hör till samma stambråk och antalet delar är samma”.

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{4}{8}+\frac{2}{8}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$$

Figur 1a

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4+2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

1b



1c

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$$

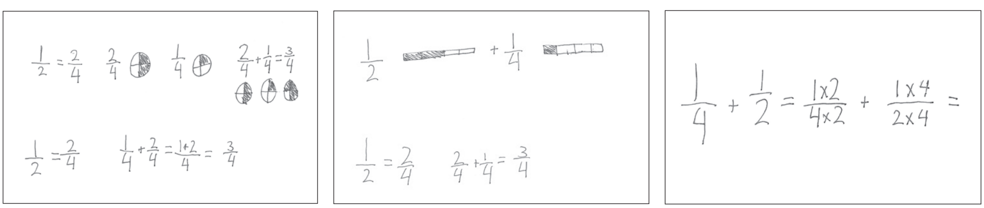
1d

På samma sätt som i tidigare undervisning visualiserade läraren additionerna grafiskt för att konkretisera addition med liknämniga bråk (figur 1c) och förklarade: ”Två fjärdedelar har två rutor och en fjärdedel har en ruta, två styck fjärdedelar adderat med en fjärdedel är lika med tre rutor, alltså tre fjärdedelar”. Läraren hade medvetet valt dessa inledande exempel för att återspegla elevers tidigare kunskaper om addition med liknämniga bråk och för att förbereda för det nya – addition med olika nämnare. Principen att *utveckla ny kunskap via systematisk variation av tidigare kunskap* användes i lektionen på följande vis: ”Det verkar som er förståelse av liknämniga bråk, bråk med samma nämnare, är riktigt bra. Nu ska vi lära oss något nytt. Gissa vad vi ska lära oss idag. Vi ska lära oss om bråk med olika nämnare.”

Ett additionsuttryck med två olika nämnare presenterades på tavlan (figur 1d). Det är inte interaktionen i sig som är avgörande för att möjliggöra en övergång från tidigare till ny kunskap utan det är exemplen som läraren har valt som är grund för att kunna återspegla och förbereda för det nya som ska läras. Notera därför det medvetna valet där skillnaden mellan det nya exemplet med olika nämnare $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ och det tidigare exemplet med samma nämnare $\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)$ är att den första termen är uttryckt i annan form men att både den och summan har samma värde.

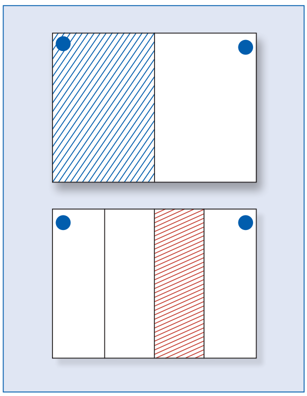
Del 2: Man kan addera bråktal med olika nämnare, men kan de adderas direkt?

Efter att ha presenterat uppgiften $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ bad läraren eleverna att redogöra för sina lösningsstrategier på ett papper. Efter en stunds enskilt arbete fick eleverna delge sina tankar och lösningar för varandra i mindre grupper och utifrån gruppdiskussionerna lyfte läraren upp några olika tillvägagångssätt för gemensam diskussion. Flera elever gjorde bråken liknämniga genom att förlänga en halv till två fjärdedelar och de visade sin strategi genom att använda olika grafiska representationer (figur 2a & b), några elever löste uppgiften utan grafiska representationer (beräkning längst ner i figur 2a). En elev förlängde båda talen till åttondelar (figur 2c).



Figur 2a 2b 2c

Att jämföra olika lösningsstrategier för att lösa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ i uppgiften ovan illustrerar principen *ett problem – systematisk variation av lösningsmetoder* och används för att eleverna ska kunna undersöka likheter och skillnader och därigenom öka sina matematiska erfarenheter och kunskaper. Detta gjordes i det aktuella fallet genom att läraren uppmärksammade eleverna på skillnaderna mellan nämnarna och vad det innebär att nämnarna är olika. I kontrast till elevernas svar i den inledande delen om addition med liknämniga bråk uttryckte nu eleverna i stället att ”Bråkens delar är inte lika” och ”Bråken har inte samma antal enheter". Läraren illustrerade elevernas svar med hjälp av två pappersark som representerade en halv och en fjärdedel (figur 3a) och frågade vilken skillnad de kunde se mellan de olika stambråken. Än en gång menade eleverna att bråkens delar är olika stora och att en halv är en större del än en fjärdedel. Läraren följde upp med frågan: "Vad måste vi göra för att kunna addera?" och uppmanade eleverna att uttrycka sina svar på olika vis, till exempel: "Man måste förlänga så att talen får samma nämnare", "Man kan dela en halv så att det blir fjärdedelar" och "Delarna måste vara identiska för att kunna adderas". Innebörden av förlängning visades genom att halvorna i det översta arket (figur 3a) delades till fjärdedelar och läraren skrev sedan uttrycket för detta på tavlan (figur 3b). Notera att läraren i interaktionen ovan inte nöjer sig med en förklaring från eleverna utan ber eleverna förklara "vad man måste göra" på olika sätt. Läraren använder sig inte enbart av principen om *ett problem – systematisk variation av lösningsmetoder* utan även principen om *systematisk variation av representationsformer*. Som framkommer i detta exempel så inkluderas både grafisk, numerisk och verbal representationsform. Principen syftar till att hjälpa eleverna att utveckla en djupare förståelse av det matematiska innehållet.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

Figur 3a 3b

I nästa skede uppmärksammade läraren eleverna på vad förlängning innebär i likhet med "när täljare och nämnare görs större, delas täljare och nämnare in i mindre men fler delar". För att återgå till den inledande delen av lektionen, kan man nu se hur principen om att *utveckla ny kunskap via systematisk variation av tidigare kunskap* användes. De tre första exemplen (figur 1a) banade väg för att addera med olika nämnare, det vill säga en strategi där eleverna även måste använda tidigare kunskap om att addera med liknämniga bråk. Värt att notera är att den grafiska representationsformen som användes i lektionens två inledande delar återkommer och kan därför ses som ytterligare ett exempel på principen om att *utveckla ny kunskap via systematisk variation av tidigare kunskap*, det vill säga hur läraren genom val av uppgifter och representationsformer kan stötta och länka ihop elevernas tidigare kunskap med det nya som ska läras.

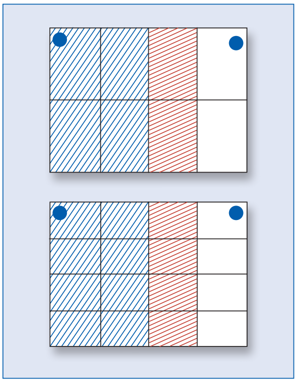
Del 3: Man kan förlänga med minsta gemensamma nämnare, men kan man förlänga på andra sätt?

I denna del av lektionen användes fortfarande uppgiften $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ men nu expanderades den genom förlängning i flera olika steg för att eleverna ska kunna undersöka samband mellan bråken och därmed öka sin förståelse av förlängning. Läraren uppmanade eleverna att förlänga bråken på flera olika sätt: ”Kan man göra på något annat sätt, förutom att dela in en halv i fjärdedelar?” Eleverna gav olika förslag utifrån idén att talen kunde delas in i mindre och mindre delar, från fjärdedelar till åttondelar, sextondelar, trettioandradelar och så vidare. I figur 4 visas några av dessa förlängningar (a) samt de illustrationer (b) som användes av eleverna för att representera uppdelningen.

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{16}+\frac{4}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$



Figur 4a 4b

Eftersom uppgiften $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ fortfarande användes kan denna interaktion ses som en fortsättning på principen om *ett problem – systematisk variation av lösningsmetoder* och *systematisk variation av representationsformer* men nu med fokus på att eleverna ska förstå att ”oavsett hur mycket man delar täljaren och nämnaren så blir svaret ändå tre fjärdedelar”. De olika stegen av förlängning och tillhörande grafisk representation användes för att stärka elevernas förståelse av ekvivalensen mellan de olika förlängningarna samt att varje steg av förlängning resulterar i mindre och fler delar.

I nästa skede sa läraren ”Nu kommer jag att ändra uppgiften lite” och så presenterades subtraktionsuttrycket $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ som fortfarande innehåller samma bråk. Eleverna löste uppgiften individuellt och i likhet med tidigare förfarande ställde läraren frågor om uppgiften kunde lösas direkt eller ej samt om hur eleverna löste uppgiften. Därefter utmanade läraren eleverna med att använda ett vanligt förekommande felsvar som innebär att täljare och nämnare adderas direkt även om bråken inte är liknämniga (figur 5).

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

Figur 5

Följande dialog visar hur läraren uppmuntrade eleverna att resonera och förklara varför bråk med olika nämnare inte kan adderas direkt:

1. Lärare:	Är detta rätt? [Pekar på uppgiften i figur 5]
2. Elever:	Nej.
3. Lärare:	Det måste vi förklara. Hur verkar den valda beräkningsstrategin här?
4. Elever:	Den är fel!
5. Lärare:	Kan vi visa det på något vis? Om vi förkortar $\frac{2}{6}$, då får vi …
6. Elever:	$\frac{1}{3}$.
7. Lärare:	Ja visst $\frac{1}{3}$. Låt mig se, om man jämför $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ …
8. Elever:	$\frac{1}{2}$ är större.
9. Lärare:	Vad hände med svaret efter beräkningen?
10. Elever:	Det blev mindre!
11. Lärare:	Förklara då, kan man addera bråken i uppgiften direkt?
12. Elever:	Nej.
13. Lärare:	Varför kan vi inte addera bråk med olika nämnare direkt?
14. Elev 1:	Det är inte samma standardbråk.
15. Elev 2:	Enheterna är olika.
16. Elev 3:	Eftersom antalet delar som talen är indelade i inte är samma så leder det ingen vart om man adderar dem.
17. Lärare:	Antalet delar är inte samma, vilket betyder att delarna inte kan adderas, att addera dem leder ingenstans. Det är omöjligt att addera dem, eller hur? Så det innebär att om vi har olika nämnare så är bråkdelarna …
18. Elever:	Olika.
19. Lärare:	Kan vi då addera dem då?
20. Klassen:	Nej!

I dialogen ovan (rad 14–16) uttrycker eleverna och läraren verbalt på olika sätt varför man inte kan addera bråk med olika nämnare direkt. Detta kan därför ses som ytterligare ett exempel på principen om *systematisk variation av representationsformer.*

Tre olika typer av exempel

Om vi också tittar på de exempel som läraren har valt ser vi att det egentligen är samma uppgift $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ som har använts genom hela lektionen, men i lite olika utföranden. Dessa olika utföranden illustrerar principen om *systematisk variation av egenskaper via olika typexempel*. Den första typen av exempel som läraren hade valt till den inledande delen av lektionen var tre *standardexempel* (figur 1a). Dessa visar på gemensamma aspekter av addition med tal i bråkform och som ligger i linje med uppgifter som eleverna har stött på tidigare. Att förlänga $\frac{1}{2}$ till $\frac{2}{4}$ (översta exemplet i 4a) kan också ses som ett standardexempel – det är vanligt förkommande att förlänga med minsta gemensamma nämnare. Men att addera bråk med olika nämnare är inte begränsat till att använda principen om minsta gemensamma nämnare. För att eleverna ska få en mer generell förståelse av addition med olika bråk och vad förlängning innebär behöver andra aspekter varieras, till exempel förlängning med andra tal (övriga exempel i figur 4a). Den andra typen av exempel är just sådana *icke-standard-exempel* som hjälper eleverna att abstrahera aspekter av ett begrepp. Men för att utmana eleverna och därmed fördjupa deras förståelse användes även en tredje typ av exempel – ett *icke-exempel* – den vanligt förekommande missuppfattningen att bråk med olika nämnare kan adderas direkt (figur 5) kontrasterades mot principen att göra bråken liknämniga.

Avslutande kommentar

Vi har illustrerat hur några verktyg från Shanghai-traditionen används i en lektion om att addera tal i bråkform. Egentligen är det mer korrekt att säga att vi har försökt att illustrera en stor del av en lektion eftersom all interaktion och den avslutande delen där eleverna arbetade individuellt inte har återgetts. Lektionen ska inte ses som ett ”recept” eller en lektionsplanering som strikt bör följas för att fördjupa elevers lärande. Vår förhoppning är att principerna och exemplen kan ge inspiration för att reflektera över och planera egen matematikundervisning som passar den egna elevgruppen. Kvaliteten i lektionen, som vi ser det, ligger i att läraren dels har en medvetenhet om vilket matematiskt innehåll som bör belysas i varje del av lektionen, dels använder en systematisk variation av det matematiska innehållet för att lyfta fram dessa idéer.

LITTERATUR

Bao, J., Huang, R., Yi, L. & Gu, L. (2003). Study of 'Bianshi Jiaouxe' [undervisa med variation]. *Mathematics Teaching*, 1–3.

Gu, L., Huang, R. & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning. I L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (red), *How Chinese learn mathematics: perspectives from insiders* (309–347). World Scientific.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Erlbaum.

Pang, M. F., Marton, F., Bao, J. & Ki, W. W. (2016). Teaching to add three-digit numbers in Hong Kong and Shanghai: illustration of differences in the systematic use of variation and invariance. *ZDM*, *48*(4), 455–470.

Skolverket (2019). Pisa 2018. *15-åringars kunskaper i läsförståelse, matematik och naturvetenskap.*

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* Free Press.