Christoph Kirfel

Eulertalet och Eulerfunktionen

Talet *e* kan elever möta i slutet av sin gymnasietid. Det finns traditionellt två olika förklaringar och här ger författaren en koppling mellan de båda.

Traditionellt möter man två olika ansatser till Eulers tal e. Den ena presenterar e som ett gränsvärde för en följd

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

medan den andra presenterar e som en oändlig summa

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

I norska läroböcker har bara gränsvärdesansatsen överlevt, men serieansatsen till Eulertalet e ligger också inom räckhåll för elever i slutet av gymnasiet eftersom den bara bygger på partiell integration.

I den här artikeln vill jag skapa en koppling mellan dessa ansatser. Det visar sig att man i båda fallen måste gå vägen via Eulerfunktionen $y = e^x$ för att komma till Eulertalet e.

Inledande undran

Om vi utgår från gränsvärdesdefinitionen

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

och betraktar de ”två gränsprocesserna” separat, skulle man kunna ledas till att först beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = 1 \text{ och sedan beräkna } \lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Då skulle man få 1 som svar på gränsprocessen. På den andra sidan skulle man kunna tänka så här: $1 + \frac{1}{n}$ är ett tal som är större än 1 och höjer man ett sådant tal till allt högre potenser får man oändlighet, exempelvis

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{10}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (1{,}1)^n = \infty.$$

Vi ser att definitionen av Eulertalet innebär vissa fallgropar och att vi överhuvudtaget kan uttala oss om detta gränsvärde är i grunden uppseendeväckande.

Integralen och derivatan av exponentialfunktioner

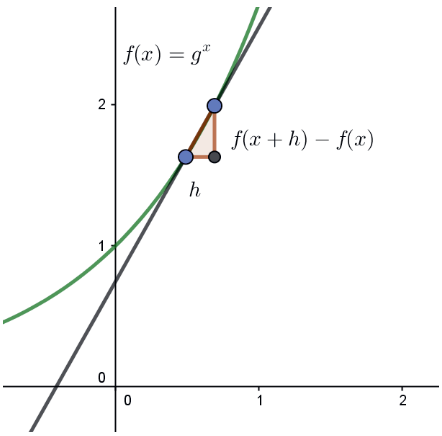
I nästa del vill jag gå från Eulertalet till exponentialfunktioner och senare återgå till själva Eulertalet som ett grundläggande tal för en exponentialfunktion med mycket speciella egenskaper. Jag vill visa sambandet mellan derivatan och integralen av exponentialfunktioner och jag ska visa att derivatan av exponentialfunktionen är baserad på ett specifikt gränsvärde som även dyker upp när vi integrerar exponentialfunktionen. Kunskapen om detta gränsvärde kommer att ge oss både derivatan och integralen. Det gör det extra intressant att studera detta gränsvärde, vilket leder oss till den första definitionen av Eulertalet *e*.

Vi betraktar en exponentialfunktion $f(x)=g^x$. En sådan funktion kan beskrivas med hjälp av två egenskaper

$$f(a+b)=f(a)\cdot f(b) \qquad \text{och} \qquad f(1)=g.$$

I det följande kommer vi endast att använda dessa två egenskaper hos funktionen. I första hand handlar det om att hitta derivatan. Med hjälp av definitionen av derivatan ser vi att

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g^{x+h}-g^x}{h}=g^x\lim_{h\to 0}\frac{g^h-1}{h}.$$



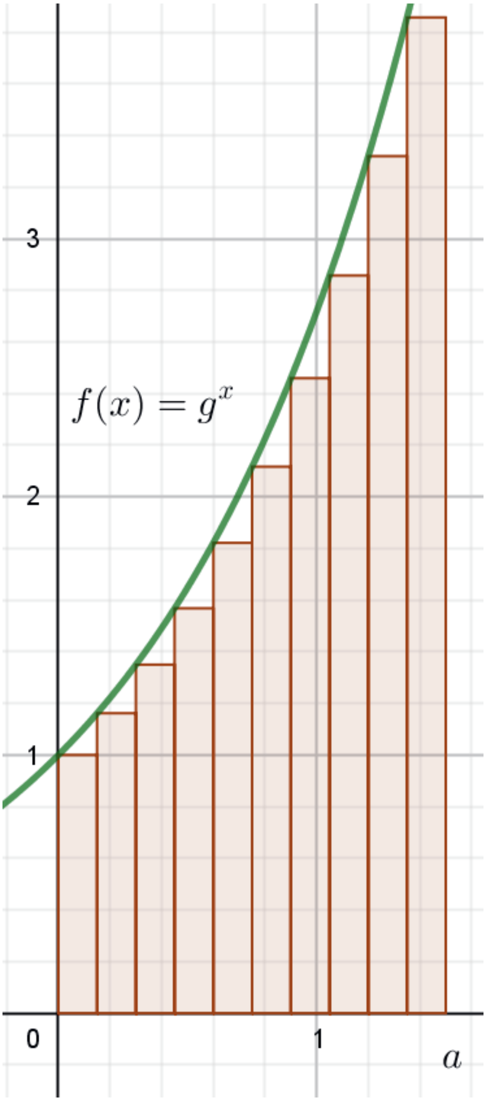
Figur 1. *Derivatan av en exponentialfunktion*

Genom att endast använda multiplikationsegenskapen $g^{a+b}=g^a g^b$ ser vi att derivatan av exponentialfunktionen återigen är en exponentialfunktion med samma bas multiplicerat med en faktor, nämligen

$$G=\lim_{h\to 0}\frac{g^h-1}{h}.$$

Denna faktor känns igen som derivatan av exponentialfunktionen vid origo, $G=f'(0)$.

Det överraskande är att exakt samma faktor, det vill säga G, dyker upp när vi integrerar exponentialfunktionen. Här utgår vi från Riemann-integralen för exponentialfunktionen. Vi föreställer oss intervallet $[0,a]$ uppdelat i n mindre intervall med längden h, så att $h\cdot n=a$. Då kan vi ställa upp Riemann-integralen som summan av rektangelareor under exponentialfunktionen, det vill säga



Figur 2. Riemann-integralen av en exponentialfunktion

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} h\cdot f(ih)\\
&= \lim_{h\to 0} h \sum_{i=0}^{n-1} g^{ih}\\
&= \lim_{h\to 0} h \frac{g^{nh}-1}{g^{h}-1}\\
&= \lim_{h\to 0} h \frac{g^{a}-1}{g^{h}-1}\\
&= (g^{a}-1)\lim_{h\to 0} \frac{h}{g^{h}-1}\\
&= \frac{g^{a}-1}{G}\,.
\end{aligned}
$$

Här använde vi formeln för en geometrisk serie. Vi ser att samma gränsvärde, G, kommer in i formeln, denna gång visserligen i nämnaren. Denna dubbla funktion av gränsvärdet, G, både för derivatan och för integralen gör det extra spännande och därför fortsätter vi med det.

Situationen där $G=1$ är särskilt ”cool”, eftersom vi har att $f'(x)=f(x)$. Vi är därför särskilt angelägna om grundtalet g som gör att gränsvärdet G blir lika med 1.

Eulertalet som gränsvärde

Vi tittar nu på uttrycket

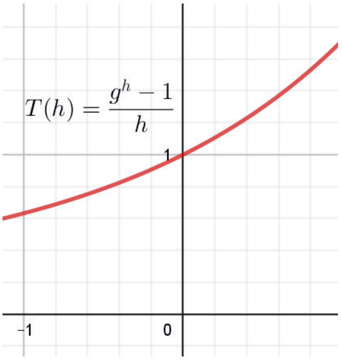
$$T(h)=\frac{g^h-1}{h}$$

som en funktion av h, studerar denna funktion och antar vidare att $G=1$. Då blir funktionen T kontinuerlig för $h=0$. Vi vill nu ta reda på om grafen för funktionen ökar. För detta beräknar vi derivatan av funktionen genom att använda kvotregeln för derivata. Då får vi

$$T'(h)=\frac{h\cdot g^h-(g^h-1)}{h^2}$$

för derivatan av $T(h)$. Om vi sätter in $h=0$, blir både täljare och nämnaren lika med noll. Vi måste därför använda L'Hospitals regel för att hitta värdet på funktionen $T'(h)$ för $h=0$. Vi har

$$T'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{(hg^h-g^h+1)'}{(h^2)'}=\lim_{h\to 0}\frac{hg^h+g^h-g^h}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g^h}{2}=\frac{1}{2}.$$



Figur 3. Funktionen $T(h)$

Därmed vet vi nu att funktionen $T(h)$ ökar i $h=0$ och det finns ett intervall [-c, c] runt origo där funktionen ökar. Om vi tänker oss ett litet tal, exempelvis $\frac{1}{n}$ i detta intervall, då har vi

$$T(-\tfrac{1}{n})\le T(0)=G=1\le T(\tfrac{1}{n}).$$

Detta hjälper oss att hitta det sökta bastalet g. Vi finner att

$T(\frac{1}{n})=\frac{g^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\ge T(0)=G=1$, det vill säga

$g^{\frac{1}{n}}-1\ge\frac{1}{n}$ eller $g^{\frac{1}{n}}\ge 1+\frac{1}{n}$.

På den andra sidan (för negativa värden $(-\frac{1}{n})$) sker liknande ting:

$T(-\frac{1}{n})=\frac{g^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}}\le T(0)=G=1$, igen eftersom $T(h)$ växer. Därmed är

$g^{-\frac{1}{n}}-1\ge -\frac{1}{n}$, (multiplikation med negativt tal vänder olikhetstecknet), alltså

$g^{-\frac{1}{n}}\ge 1-\frac{1}{n}$ och därmed $g^{\frac{1}{n}}\ge\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$.

Sätter vi samman olikheterna får vi $1+\frac{1}{n}\le g^{\frac{1}{n}}\le 1+\frac{1}{n-1}$.

Om vi upphöjer båda olikheterna till n:te potensen blir det

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le g\le\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

I gränsvärdesfallet går den sista faktorn mot 1 och den övre och nedre gränsen blir lika. Vi har alltså hittat grundtalet g för exponentialfunktionen där funktionen och derivatan är lika. Vi kallar detta grundtal för Eulertalet, e. Här gäller

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vi ser att Eulertalet nås via exponentialfunktionen, en något "bakvänd" observation. Man skulle kunna tro att exponentialfunktionen är ett mer komplext och svårare fenomen än ett enda tal, Eulertalet.

Eulertalet som en oändlig summa

Vi försöker nu visa den andra kända formeln för Eulertalet. Även i detta fall behöver vi välja ett tillvägagångssätt som använder sig av exponentialfunktionen $f(x) = e^x$, och vi väljer nu e som bastal för exponentialfunktionen, eller med andra ord sätter vi G = 1. Genom att använda grundsatsen för differential- och integralkalkyl (vilket betyder att derivata och integration är "motsatta" operationer) kan vi skriva

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 f'(t) \cdot 1 \cdot dt.$$

Här kommer vi att använda partiell integration. Vi väljer $u(t) = f'(t)$ och $v'(t) = 1$. Ett klokt val av $v(t) = -(1 - t)$ hjälper oss nu vidare. Vi kan skriva

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) \cdot 1 \cdot dt = -f'(t)(1-t)]_0^1 + \int_0^1 f''(t)(1-t)dt =$$

$$= -f'(1)(1-1) + f'(0)(1-0) + \int_0^1 f''(t)(1-t)dt =$$

$$= f'(0) + \int_0^1 f''(t)(1-t)dt.$$

Här tar vi en liten paus innan vi använder samma regel (partiell integration) en gång till, denna gång med $u(t) = f''(t)$ och $v'(t) = 1 - t$.
Nu är det klokt att välja $v(t) = -\frac{(1-t)^2}{2}$. Då får vi

$$f(1) - f(0) = f'(0) - f''(t)\frac{(1-t)^2}{2}\Big]_0^1 + \int_0^1 f'''(t)\frac{(1-t)^2}{2}\,\mathrm{dt}.$$

Detta blir i nästa omgång

$$f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - f'''(t)\frac{(1-t)^3}{2 \cdot 3}\Big]_0^1 + \int_0^1 f''''(t)\frac{(1-t)^3}{2 \cdot 3}dt.$$

Så kan vi fortsätta och uppnår till slut

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots$$

Nu är $f(1) = e$ och $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ för alla n och därmed har vi hittat det andra viktiga sambandet för Eulertalet:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Avslutningsvis

Vi ser att i båda fallen handlar sättet att hitta en formel för Eulertalet om exponentialfunktionen $f(x) = e^x$. Vi måste därför gå till ett till synes mer komplicerat begrepp (exponentialfunktionen) för att visa något om ett till synes enklare begrepp (bastalet i själva exponentialfunktionen, det vill säga själva Eulertalet). Denna observation, att den enklaste vägen till Eulertalet är via exponentialfunktionen, beskrivs också i litteraturen (Kneser, 2004).

Anmärkning

För att inse att serierepresentationen av e verkligen konvergerar, måste vi studera den så kallade resttermen

$$R_n = \int_0^1 f^{(n+1)}(t)\,\frac{(1-x)^n}{n!}.$$

Det absoluta värdet för integralen är mindre än eller lika med det maximala värdet för integrandfunktionen multiplicerat med bredden på integrationsintervallet som är 1:

$$|R_n| \le \frac{|max\{f^{(n+1)}(t)|\,0 \le t \le 1\}| \cdot |max\{(1-t)^n|\,0 \le t \le 1\}|}{n!} \cdot 1 \le \frac{e \cdot 1 \cdot 1}{n!}$$

Resten går därför mot noll när indexet n växer mot oändligheten och serien konvergerar.

LITTERATUR

Kristensen, T. E. (2014). *Elevenes møte med Eulertallet*, Tangenten 2014:1.

Kneser, M. (2004). *Ein etwas anderer Zugang zur Exponentialfunktion*, Math. Semesterber. 51, 225 – 229 (2004), Springer Verlag

Nilsen, T. J. (2013). *Å "gjenoppdage" Eulertallet e*, Tangenten 2013:1.

Författarens tack till Vetle Rohde för grundig genomläsning och goda kommentarer.