

## Den böjda linjalens matematik

Problemet med att finna kurvformen för en böjd linjal är ett exempel på ett fascinerande problem som verkar enkelt men som kräver ganska avancerade metoder för att lösas med god noggrannhet. Å andra sidan kan ett enkelt uttryck tas fram experimentellt genom mätningar och kurvanpassning.



Det finns många olika kurvformer i naturen. En av dessa är kurvformen för ett rep eller en kedja som är fastsatt i sina båda ändrar och hänger fritt, endast påverkad av jordens dragningskraft på grund av kedjans egen massa. Denna kurvform benämns "Katenaria" eller "Kedjelinjen" och kan beskrivas av en cosinus hyperbolicus-funktion, se till exempel Nämnarenartikeln *Katenaria – Kedjelinjen*.

En annan kurvform är den som bildas då en linjal trycks ihop från ändarna. Om krafterna som trycker ihop linjalen är tillräckligt små händer ingenting. Om däremot kraften ökar över ett visst värde (den så kallade knäcklasten), så kan linjalen plötsligt böjas. Därefter ger en liten ökning av kraften en stor ökning av utböjningen. Denna typ av stabilitetsproblem kallas knäckning inom hållfasthetsläran. Matematiken bakom fenomenet, som har studerats genom att använda den exakta differentialekvationen och en approximativ metod, redovisas kortfattat i den här artikeln. Ett par experimentella undersökningar som visar hur detta stoff kan användas i undervisningen på grundskolan och i gymnasiet beskrivs mer detaljerat.

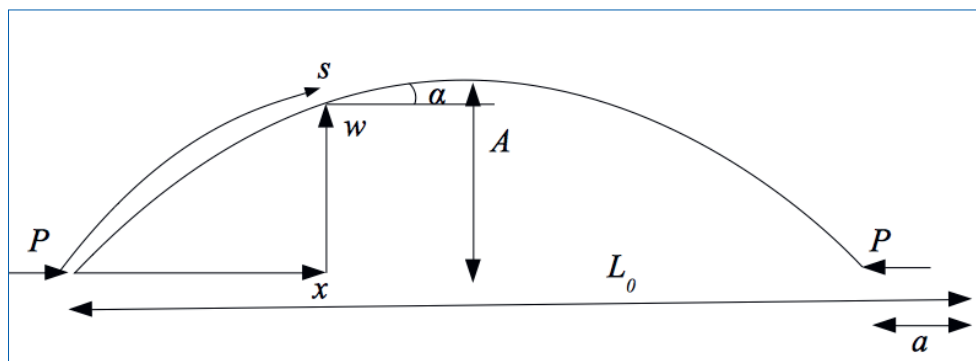
Elastica är ett latinskt uttryck som kan översättas med "tunn strimma av elastiskt material". Det matematiska problemet att beskriva kurvformen för en böjd elastica (till exempel en linjal eller tumstock) löstes av Euler 1744. År 1859 upptäckte Kirchoff att samma differentialekvation kan användas för att beskriva rörelsen för en matematisk pendel.

Ett problem som ibland uppstår för snickare är att tumstocken böjer sig. Ett resultat av undersökningen beskriven i denna artikel är att tumstockens mittpunktsutböjning kan beräknas med ett enkelt analytiskt uttryck, om det är känt hur mycket den trycks ihop (den axiella förskjutningen).

För att visualisera böjda linjalers kurvformer, har en enkel programvara utvecklats, vilken bland annat kan användas i undervisning. Den numeriska implementeringen har gjorts i programvaran VPython som körs direkt i en webbläsare och nås på länken: [www.glowscript.org](http://www.glowscript.org).

## Analytiska och numeriska resultat

Analytiska och numeriska studier av fenomenet är troligen lite för avancerade för gymnasieelever. Här presenteras därför bara kortfattat resultaten av en sådan studie av den exakta differentialekvationen. För en mer detaljerad härledning, se artikeln *The curve shape of a bent ruler – analytical, numerical and experimental studies*, eller den något omarbetade svenska versionen av artikeln: *Kurvformen för en böjd linjal*, som finns på Nämnaren på nätet.



Figur 1: Figur som visar en böjd linjal.

Figur 1 visar en linjal som böjs på grund av de axiella krafterna  $P$  i varje ände. Avståndskoordinaten längs linjalen betecknas  $s$ , laterala förskjutningen (utböjningen) betecknas  $w(s)$ , det horisontella avståndet  $x(s)$ , vinkeln  $\alpha(s)$ , den axiella förskjutningen  $a$ , mittpunktens utböjning  $A$  och längden  $L_0$ . Sammanfattningsvis kan kurvformen för en böjd linjal utsatt för axiell belastning erhållas på ett par olika sätt:

- ◆ Funktionen  $\alpha(s)$  erhålls genom en numerisk lösning av den exakta differentialekvationen  $\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{P}{EI} \sin(\alpha) = 0$ , där  $EI$  är linjalens böjstyvhetsmoment.

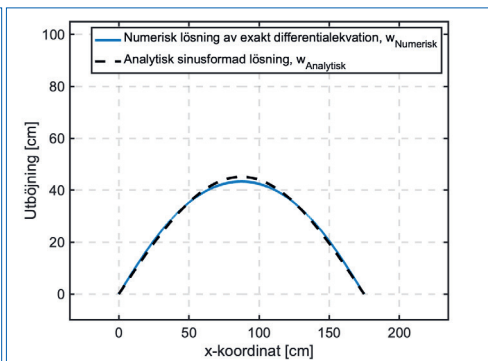
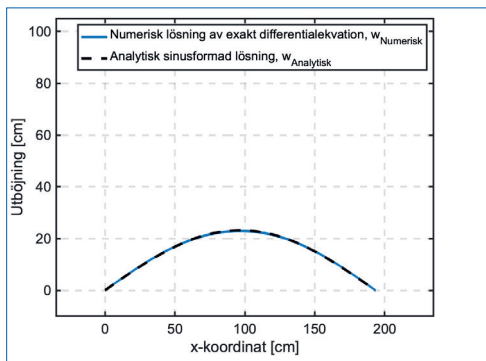
Kurvformen  $w_{\text{Numerisk}}(x)$  bestäms sedan genom numerisk beräkning av integralerna  $w_{\text{Numerisk}}(s) = \int_0^s \sin(\alpha(s')) ds'$  och  $x(s) = \int_0^s \cos(\alpha(s')) ds'$

- ◆ Ett approximativt analytiskt uttryck tillämpligt för små axiella förskjutningar ges av:  $w_{\text{Analytisk}}(x) = A_{\text{Analytisk}} \sin\left(\frac{\pi x}{L_0 - a}\right)$ , där

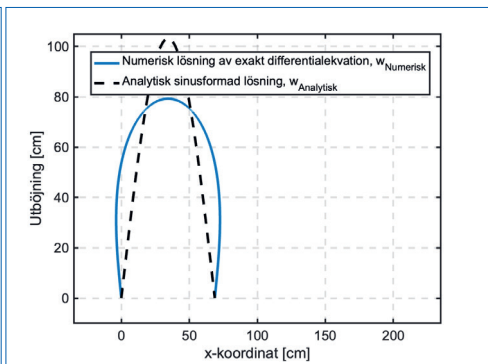
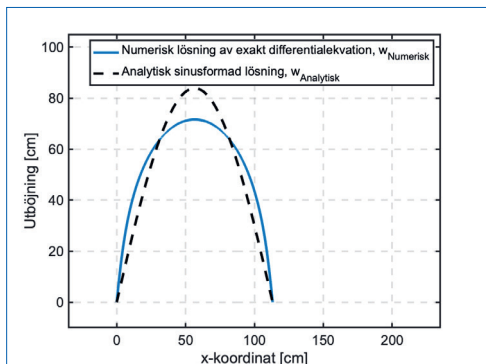
$$A_{\text{Analytisk}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a} = \frac{2\sqrt{L_0}}{\pi} \sqrt{a} = \frac{2\sqrt{L_0}}{\pi} a^{0,5}$$

## Numeriska resultat presenteras grafiskt

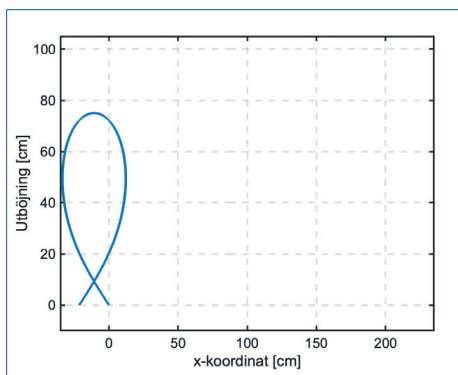
Figur 2–6 visar beräknade resultat för den ihoptryckta tumstocken för axiella förskjutningar mellan 6,6 cm och 221 cm. Från figurerna ser man att den analytiska lösningen fungerar bra för små axiella förskjutningar, emedan mittpunktens utböjning överskattas för stora axiella förskjutningar. I figur 6 ser vi att den analytiska lösningen inte alls fungerar för fallet där den axiella förskjutningen är större än tumstockens initiala längd – elastican slår knut på sig själv.



Figur 2 och 3: Ihoptryckt trätumstock, axiell förskjutning 6,6 cm respektive 25 cm.



Figur 4 och 5: Ihoptryckt trätumstock, axiell förskjutning 87 cm respektive 131 cm.



Figur 6: Ihoptryckt trätumstock, axiell förskjutning 221 cm. Endast numerisk lösning av den exakta differentialekvationen,  $w_{\text{Numerisk}}$  visas.

## Experimentella studier

Två experimentella undersökningar genomfördes för att jämföra teoretiska studier med experimentella data.

### Mittpunktens utböjning för tumstock av trä

För att experimentellt undersöka inverkan av tumstockens ena ändpunkts axiella förskjutning på mittpunktens utböjning kan mätningar göras med en två meter lång tumstock. Mätarrangemanget illustreras i figur 7. Vid ett sådant försök valdes olika värden för den vänstra ändens axiella förskjutning och mittpunktens utböjning mättes. Det noterades och kompenserades för att mittpunkten förflyttades åt höger under försöket när högre värden för den vänstra ändens axiella förskjutning valdes. För att undvika inverkan av gravitation, böjdes linjalen horisontellt längs golvet. Mätdata redovisas i tabell 1.



Figur 7: Experiment för att studera inverkan av vänstra ändens förskjutning på mittpunktsutböjningen för en tumstock.

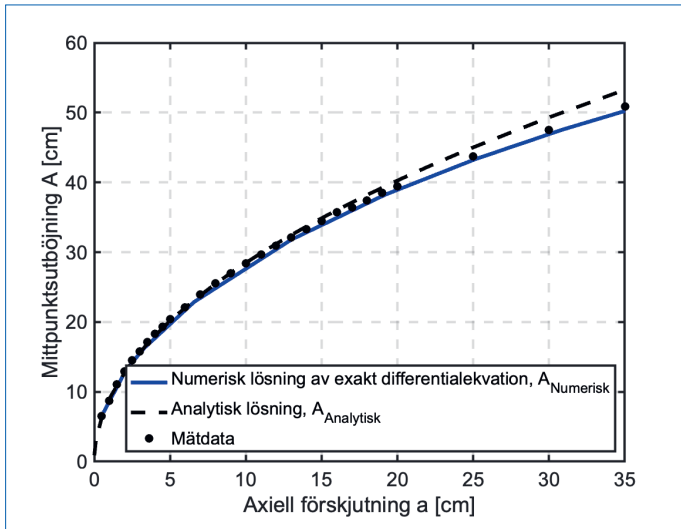
Axiell förskjutning $a$ (cm)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	
Mittpunktsförskjutning $A$ (cm)	6,5	8,7	11,1	12,9	14,5	15,8	17,1	18,3	19,3	
Axiell förskjutning $a$ (cm)	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	
Mittpunktsförskjutning $A$ (cm)	20,4	22,1	23,9	25,5	27,0	28,4	29,7	30,9	32,1	
Axiell förskjutning $a$ (cm)	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0	25,0	30,0	35,0
Mittpunktsförskjutning $A$ (cm)	33,3	34,5	35,7	36,4	37,4	38,5	39,4	43,7	47,5	50,9

Tabell 1: Experimentella data för trätumstock

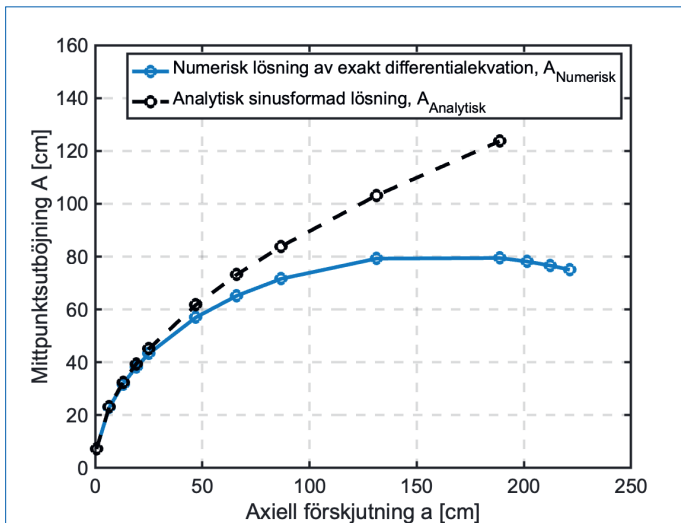
Mittpunktsutböjningen ( $A$ ) som funktion av ändpunktens axiella förskjutning ( $a$ ) presenteras i de två följande figurerna. I figur 8 är en jämförelse med mätdata inkluderad, men i figur 9 presenteras endast beräknade resultat. Av figur 8 framgår att det är en god överensstämmelse mellan mätdata och beräknade värden för små axiella förskjutningar.

En kurvanpassning med hjälp av minstakvadratmetoden till en funktion av typen  $A(a) = Ca^D$  gav värden  $C = 0,85\text{m}^{0,5}$  och  $D = 0,48$  för mätdata presenterade i figur 8 och tabell 1. Detta kan jämföras med ekvationen, vilken för användning av SI-enheter och  $L_0 = 2\text{m}$  kan skrivas:

$$A_{\text{Analytisk}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a^{0,5} \approx 0,90a^{0,5}$$



Figur 8: Mittpunktens utböjning ( $A$ ) som funktion av axiell förskjutning ( $a$ ) med små axiella förskjutningar för trätumstock. Jämförelse mot mätdata.

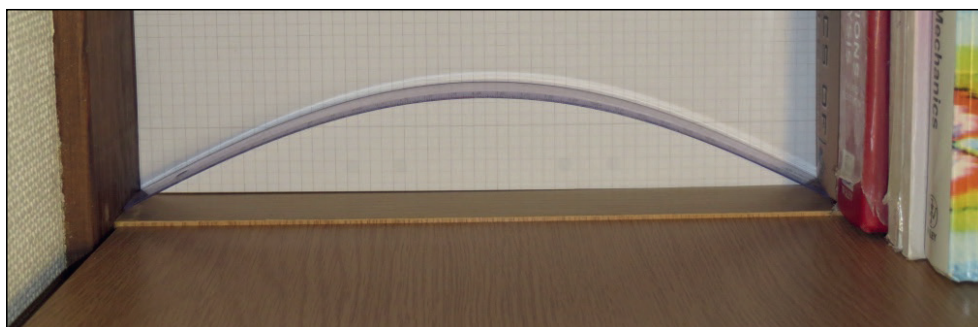


Figur 9: Mittpunktens utböjning ( $A$ ) som funktion av axiell förskjutning ( $a$ ) med stora axiella förskjutningar för trätumstock.

## Kurvform för linjal av plast

Att undersöka kurvformen för en plastlinjal är ett annat experiment, som är enkelt att genomföra med elever i en klass. En 30 cm lång plastlinjal böjs, till exempel mellan en vägg och en stabil och hållfast hög av böcker, på ett A4-papper med 5 mm-rutor, se figur 10. Kurvformen för den böjda linjalen ritas sedan upp på pappret och mätpunkter läses av som koordinater  $(x, y)$  på den uppritade kurvan, där ett koordinatsystem med origo i linjalens vänstra ändpunkt införts. Värdet för linjalens ursprungslängd  $L_0$  och den axiella förskjutningen  $a$  mäts också. Mätdata redovisas i tabell 2.

Eleverna kan utföra mätserier och lägga in dessa i ett kalkylblad. Om några data saknas, kan räta linjens funktion ( $y = kx + m$ ) användas för linjär interpolation mellan kända mätpunkter. Sedan kan kurvanpassning med minstakvadratmetoden göras.



Figur 10: Experiment för att studera kurvformen för en plastlinjal. Linjalen böjs mellan en vägg och en hög med stabila och hållfasta böcker.

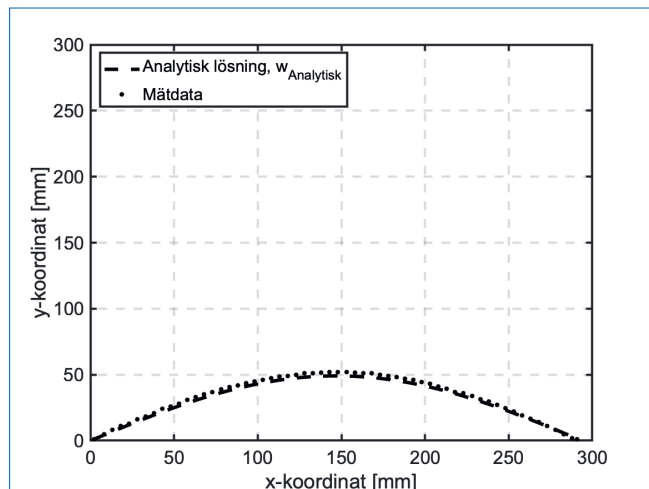
$x$ (mm)	2,0	8,0	13,0	18,0	23,0	28,0	33,0	38,0	43,0	48,0
$y$ (mm)	1,0	5,0	8,0	11,0	13,0	16,0	18,5	21,0	24,0	26,0
$x$ (mm)	53,0	58,0	63,0	68,0	73,0	78,0	83,0	88,0	93,0	98,0
$y$ (mm)	28,0	31,0	33,0	35,0	37,0	39,0	40,5	42,0	43,5	45,0
$x$ (mm)	103,0	108,0	113,0	118,0	123,0	128,0	133,0	138,0	143,0	148,0
$y$ (mm)	46,0	47,5	48,6	49,2	50,0	51,0	51,2	51,5	52,0	52,0
$x$ (mm)	153,0	158,0	163,0	168,0	173,0	178,0	183,0	188,0	193,0	198,0
$y$ (mm)	51,9	51,4	51,2	51,0	50,0	49,1	48,0	47,0	46,0	44,3
$x$ (mm)	203,0	208,0	213,0	218,0	223,0	228,0	233,0	238,0	243,0	248,0
$y$ (mm)	43,0	41,0	39,4	37,0	36,0	34,0	31,5	29,6	27,0	24,5
$x$ (mm)	253,0	258,0	263,0	268,0	273,0	278,0	283,0	288,0	291,0	
$y$ (mm)	22,0	19,0	16,7	14,0	11,0	8,0	5,0	2,0	1,0	

Tabell 2: Experimentella data från plastlinjal.

Figur 11 visar en jämförelse mellan experimentella data för den böjda plastlinjalen och den approximativa analytiska lösningen:

$$w_{\text{Analytisk}}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a} \sin\left(\frac{\pi x}{L_0 - a}\right)$$

En god överensstämmelse visas för de uppmätta mätvärdena  $L_0 = 313$  mm och  $a = 19$  mm. En kurvanpassning med minstakvadratmetoden till en funktion av typen  $w(s) = C_1 \sin(C_2 x)$  gav värdena  $C_1 = 0,052$  m och  $C_2 = 10,72$  radianer/m vilket motsvarar  $L_{0Exp} = 314$  mm och  $a_{Exp} = 21$  mm.



Figur 11: Ihoptryckt plastlinjal vid en axiell förskjutning 10 mm. Jämförelse mellan analytisk lösning och mätdata.

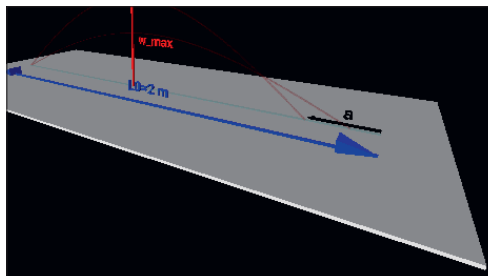
## Visualisering av resultatet i VPython

För att visualisera en böjd tumstock respektive en böjd linjal har ett par verktyg i VPython utvecklats. Tanken med dessa verktyg är att demonstrera vilka möjligheter som ges inom ramen för VPython. Elever ska även själva enkelt kunna jämföra och verifiera experimentella resultat med simuleringar och få en bra introduktion till användning av numeriska hjälpmedel. Källkoden i VPython är fritt tillgänglig, vilket möjliggör för programmeringsintresserade elever att själva modifiera enligt egna önskemål, till exempel att ändra linjalens längd. Det bör dock poängteras att visualiseringen endast gäller för små axiella förskjutningar.

I figur 12 visas bild på ett utvecklat VPython-program för att visualisera en böjd tumstock. Figur 13 visar ett liknande program för att visualisera en böjd linjal. Källkoden nås genom att klicka på den blå texten "View this program" längst upp till vänster i respektive simuleringsprogram. Simuleringarna finns länkade på Nämnaren på nätet och kan nås på:

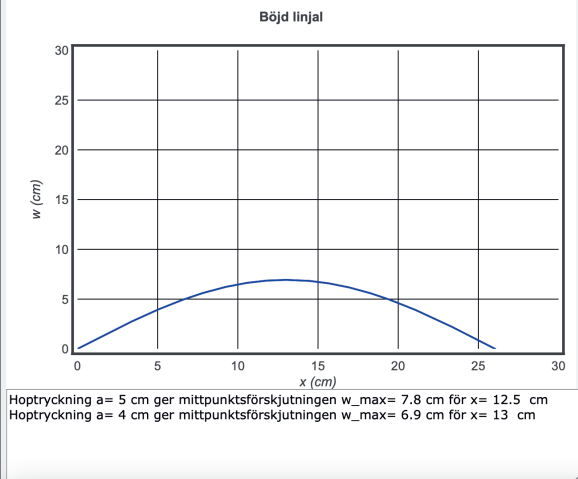
- ◆ [www.glowscript.org/#/user/Anders\\_Johansson/folder/LinjalensMatematik/program/TumStock](http://www.glowscript.org/#/user/Anders_Johansson/folder/LinjalensMatematik/program/TumStock)
- ◆ [www.glowscript.org/#/user/Anders\\_Johansson/folder/LinjalensMatematik/program/PlastLinjal](http://www.glowscript.org/#/user/Anders_Johansson/folder/LinjalensMatematik/program/PlastLinjal)

Figur 12: VPython-simulering av böjd tumstock. Önskad axiell förskjutning kan ställas in med hjälp av en glidare.



Approximativt kurvform för en böjd linjal  $w(x) = w_{\max} \sin\left(\frac{\pi x}{L_0 - a}\right)$ ,  $w_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a}$

Välj hoptryckning, a genom att flytta markören i sidled. Tryck sedan på valfri tangent på tangentbordet för att uppdatera grafen och resultatrutnan nedan. 3.95 cm



Figur 13: VPython-simulering av böjd plastlinjal. Önskad axiell förskjutning kan ställas in med hjälp av glidaren.

## LITTERATUR

- Dahlberg, T. (2001). *Teknisk hållfasthetslära*. Studentlitteratur.
- Johansson, A. (2019). The curve shape of a bent ruler – analytical, numerical and experimental studies. *Physics Education*, 54(3).
- Levien, R. (2008). *The elastica: a mathematical history*. Internal Report Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley.
- Pehrson, I. (2014). *Katenaria – Kedjelinjen*. Nämnaren 2014:2.

Denna artikel är till viss del baserad på en artikel ursprungligen publicerad på engelska i tidskriften *Physics Education* (*The curve shape of a bent ruler – analytical, numerical and experimental studies*, Phys. Ed. 54 (3) 2019), © IOP Publishing Ltd. Adapted with permission. All rights reserved. This adaptation has not been verified by IOP Publishing.