Cecilia Kilhamn

T-tabeller som verktyg för proportionella resonemang

Här beskriver författaren hur en enkel tabell med två spalter kan användas som hjälpmedel för att resonera om proportionella samband och lösa proportionalitetsproblem.

Proportionella samband dyker ofta upp i skolans matematikundervisning. Ett sätt att se på multiplikation är att utgå från ett proportionellt samband som behålls vid exempelvis skalning. En del forskare menar att många elever har en intuitiv förståelse för skalning redan i förskoleåldern, vilket innebär att det finns en god grund att bygga förståelse för proportionella samband på. En vanlig typ av proportionalitetssituationer är vad vi kan kalla varje-situationer, som exempelvis följande problem om katter och antal tassar:

> Varje katt har 4 tassar, hur många tassar har 12 katter?

En varje-situation utgår från talet 1 och är ofta formulerad utifrån vad en av något står i proportionellt förhållande till. I det här fallet vet vi att en katt har fyra tassar och kan bygga upp det proportionella resonemanget därifrån. Men det finns också många situationer som startar med ett mer komplext förhållande:

> Om 5 äpplen kostar 24 kronor, hur mycket kostar då 35 äpplen?

Här kan vi lösa frågan genom att gå ”vägen över ett” och först ta reda på vad varje äpple kostar ($24/5 = 4{,}8$) och därefter multiplicera med det önskade antalet ($4{,}8 \cdot 35 = 168$). Eller så kan vi undersöka det proportionella förhållandet som innebär att 5 förhåller sig till 24 så som 35 förhåller sig till det sökta talet. $5 : 24 = 35 : x$. Vi kan alltså direkt multiplicera 24 med 7 eftersom $5 \cdot 7 = 35$.

$$\frac{5 \cdot 7}{24 \cdot 7} = \frac{35}{168}$$

Ytterligare en sorts proportionalitetsuppgift är när två olika proportionaliteter ska jämföras.

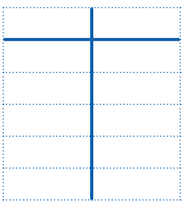
> Vilken saftblandning är starkast: 1 del saft till 3 delar vatten eller 3 delar saft till 7 delar vatten?

Två tal kan relateras till varandra antingen additivt eller multiplikativt. Saftblandningen är ett exempel på en multiplikativ relation. Att saften är spädd i proportionerna 1 del saft till 5 delar vatten innebär att jag alltid kan beräkna hur mycket vatten jag ska blanda i saften genom att mäta upp saften och multiplicera volymen med 5. Som kontrast är ett exempel på en additiv relation när vi jämför åldrar. Att jag är två år yngre än min bror innebär att jag alltid, oavsett min ålder, kan få fram min brors ålder genom att addera två. Ett viktigt första steg i en jämförelsesituation är att kunna avgöra om det är en additiv eller multiplikativ relation som avses. En indikation på att en elev inleder ett proportionellt resonemang är att eleven uttrycker situationen i multiplikativa termer.

För att utveckla sin förmåga att föra proportionella resonemang behöver elever få möjlighet att utforska och diskutera en mängd olika proportionalitetssituationer. Ett hjälpmedel för att lösa proportionalitetsproblem och utveckla förståelse för proportionella samband är en ratio-tabell eller med en kortare benämning: en T-tabell.

T-tabeller

En tabell är en matematisk uttrycksform som kan användas för att skapa ordning och belysa samband. Tabeller kan användas till många olika saker och se ut på många olika sätt, men den viktigaste egenskapen hos en tabell är att den visar samband. För att arbeta med proportionella förhållanden är en tabell med två kolumner och många rader att föredra framför en tabell med två rader och många kolumner. Förhållandet syns då i relationen mellan värden på samma rad vilket medför att det samband som är i fokus framträder i läsriktningen. Det går dessutom lätt att förlänga tabellen för att föra in fler värden. En tom tabell av det slaget liknar ett T och kallas därför ibland för T-tabell.



En T-tabell består alltså av två kolumner och många rader, där värdena på respektive rad förhåller sig till varandra på samma sätt i hela tabellen. En T-tabell är ett behändigt sätt att symbolisera de olika storheterna i en proportionell situation och för att stötta olika problemlösningsstrategier som exempelvis att dubblera och halvera, multiplicera och dividera med 10 eller utföra mer komplexa operationer för att få fram ekvivalenta uttryck för ett proportionellt samband. Här är ett exempel på en T-tabell som visar pris på apelsiner där varje apelsin kostar 5 kronor.

Antal apelsiner	Kostnad i kronor
1	5
2	10
3	15
7	35

Läses tabellen horisontellt framträder det förhållande som anges, det vill säga det proportionella förhållandet 1 : 5 som är detsamma som 2 : 10, 3 : 15 och så vidare. Tabellen kan användas för att beräkna nya värden med samma proportionella förhållande. Genom att göra succesiva beräkningar på en hel rad bibehålls det proportionella förhållandet. De nya värdena kan också uttryckas som ekvivalenta bråk:

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\frac{7}{35}$$

Ratio-tabell, proportionalitetstabell, sambandstabell, T-tabell ... Oavsett vad den kallas kan en sådan tabell fungera som en hjälp för att utveckla proportionellt tänkande, öppna för proportionella resonemang och lösa problem som handlar om proportionella samband. Här följer ett exempel:

Elevuppgift: kaniner

I en kaninbur får det plats 12 kaniner.
Hur många kaniner får det plats i 14 kaninburar?

a. Gör en T-tabell över förhållandet mellan antalet kaninburar och antalet kaniner.

b. Välj lämpliga operationer till varje rad tills rätt antal burar uppnås. Rita ut pilar som visar hur lösningen successivt beräknas.

Kaninburar	Kaniner
1	12
10	120
5	60
15	180
14	168

- multiplicera med 10
- halvera
- multiplicera med 3
- subtrahera 1 bur, 12 kaniner

Det här problemet löste en elev genom att först multiplicera med 10, sedan halvera (dividera med 2) och multiplicera med 3 för att få 15 burar. Eftersom 15 är en mer än 14 behövde hon därefter subtrahera en bur och en grupp kaniner (12 stycken) för att få fram hur många kaniner det får plats i 14 kaninburar. Utifrån tabellen går det också se att $14 \cdot 12 = 168$.

Varför T-tabeller?

Ett argument för att arbeta med T-tabeller är att det stärker taluppfattningen genom att eleverna får arbeta med uppdelning av tal och kombinationer av tal. Ett annat argument är att de kan användas som komplement eller alternativ till uppställningar eller digitala hjälpmedel. Varje beräkningsmetod har sina fördelar och sina nackdelar. Det en T-tabell kan tillföra är ett sätt att tänka kring tal som framhäver tals storlek och samband i en multiplikativ struktur, någonting ganska annorlunda än det fokus på positionssystemet och talsorter som en traditionell algoritm framhäver. Vilken metod som är bäst beror helt på sammanhanget och vad man vill uppnå. Jämför följande beräkningar av $22 \cdot 35$ och fundera på vilken som ger bäst förståelse för tal och vilken som riskerar att generera flest ”slarvfel”.

Om det är 35 barn i varje grupp och det kommer 22 grupper,
hur många barn har då kommit?

Lösning med T-tabell

Dubblera 1 och 35 till 2 och 70.
Multiplicera 2 och 70 med 10 till 20 och 700.
Addera $2 + 20 = 22$ och $70 + 700 = 770$.

Grupper	Barn
1	35
2	70
20	700
22	770

Lösning med uppställning

$$\begin{array}{r} 35 \\ \cdot 22\ {\scriptstyle 11} \\ \hline 70 \\ +70 \\ \hline 770 \end{array}$$

Multiplicera $2 \cdot 5 = 10$,
skriv 0 i entalskolumnen och 1 i minnet.
Multiplicera $2 \cdot 3 = 6$,
addera $6 + 1 = 7$, skriv 7 i tiotalskolumnen.
Multiplicera $2 \cdot 5 = 10$, skriv 0 i tiotalskolumnen och 1 i minnet.
Multiplicera $2 \cdot 3 = 6$, addera $6 + 1 = 7$, skriv 7 i hundratalskolumnen.
Addera 0 ental, $7 + 0$ tiotal, 7 hundratal.

Strategier

Jeffrey Frykholm ger förslag på operationer som elever kan använda sig av när de arbetar med en T-tabell. Han förslår att dessa introduceras successivt i undervisningen så att beräkningarna som görs blir alltmer komplexa. Slutligen ska eleverna kunna använda sig av en blandning av strategier.

1. Multiplicera med 10

Om du får 3 chokladbitar för 14 kronor, vad kostar då 30 chokladbitar?

Chokladbitar	Kronor	
3	14	$\cdot 10$
30	140	

2. Dubblera och halvera

En person tjänar 8 dollar i timmen. Hur stor blir lönen efter 16 timmar?

Timmar	Dollar	
1	8	$\cdot 2$ (dubblera)
2	16	$\cdot 2$
4	32	$\cdot 2$
8	64	$\cdot 2$
16	128	

3. Multiplicera med andra tal

Det finns 5 pennor i varje låda. Hur många pennor finns det i 18 lådor?

Lådor	Pennor	
1	5	$\cdot 6$
6	30	$\cdot 3$
18	90	

Eleven multiplicerar först hela raden (antal lådor och antal pennor) med 6 och därefter med 3 eftersom det är enklare än att direkt multiplicera med 18. Denna strategi förutsätter att eleven kan faktorisera 18 och inser att 6 och 3 är användbara delare till 18 i det här fallet. Det hade fungerat bra med 2 och 9 också, då hade höger kolumn innehållit talen 10 och 90.

4. Kombinera rader, addera och subtrahera

Det finns 15 tomater i varje korg.

Hur många tomater finns i 12 korgar? Hur många i 8 korgar?

Korgar	Tomater
1	15
10	150
2	30
12	180
8	120

Här har eleven letat sig fram med hjälp av olika kombinationer. Först multiplicerat med 10. Därefter dubblerat det ursprungliga för att få fram antal tomater i 2 lådor. På rad fyra har eleven adderat $10 + 2 = 12$ lådor och motsvarande $150 + 30 = 180$ tomater. På sista raden har eleven istället subtraherat $10 – 2 = 8$ lådor och motsvarande $150 – 30 = 120$ tomater.

Elevaktivitet – lista ut strategin

För en elev som lär sig använda en T-tabell blir många multiplikativa problem enkla att lösa med hjälp av proportionella resonemang. Att kunna följa någon annans resonemang är en lite annorlunda förmåga som kräver god taluppfattning.

Som alternativ till att eleven själv använder en T-tabell för att göra en uträkning kan man presentera olika beräkningar gjorda med T-tabell och be elever fundera på hur uppgiften löstes. Jag avslutar den här artikeln med ett exempel på en klassrumsaktivitet hämtad från boken *Learning to think mathematically with ratio tables*. Fyra T-tabeller som visar hur olika elever löst problemet med hjälp av en T-tabell presenteras. I en uppföljande diskussion kan de olika lösningarna jämföras utifrån vad som är enkelt eller effektivt. Uppgiften finns på nästa sida.

LITTERATUR

Doyle, S. (2008). *Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom*. APMC 13(2), 18–22.

Dooren, W. V., Bock, D. D. & Verschaffel, L. (2010). *From addition to multiplication … and back: the development of students' additive and multiplicative reasoning skills*. Cognition and Instruction, 28(3), 360–381.

Frykholm, J. (2013). *Learning to think mathematically with the ratio table – A resource for teachers, a tool for young children*. The Math Learning Center.

Helenius, O., Ahl, L. M. & Kilhamn, C. (2021). *Skalningsmodell för multiplikation*. Modultext, grundskolan åk 4–6, del 6. Skolverket.

Sammy ska hjälpa sina föräldrar att odla majs i trädgården. Han ser i affären att en påse majs för sådd innehåller 12 majskorn.

Hur många majskorn får han om han köper 6 paket?

Lista ut hur de fyra eleverna har löst uppgiften genom att titta på deras T-tabeller. Fundera på vilken beräkning som var enklast och varför du tycker det. Visa hur du skulle vilja lösa uppgiften.

Emmas strategi

Påsar	Majskorn
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72

Leos strategi

Påsar	Majskorn
1	12
2	24
3	36
6	72

Kims strategi

Påsar	Majskorn
1	12
10	120
5	60
6	72

Moas strategi

Påsar	Majskorn
1	12
2	24
4	48
8	92
6	72